1.5. **Курс 1, семестр 1, коллоквиум 1** [i102]

1.5.1. Курс 1, семестр 1, коллоквиум 1, каталог вопросов и заданий 2012-2013 []

1.5.1.1. Вопрос 1, определение k1s1m1-q1-N1

1. ♦♦ Вещественные числа, определения

1. Сформулируйте определение положительного вещественного числа.

2. Сформулируйте определение равных положительных вещественных чисел.

3. Сформулируйте правило сравнения положительных вещественных чисел.

2. ♦♦ Числовые множества, определения

4. Сформулируйте определение ограниченного множества вещественных чисел.

5. Сформулируйте определение ограниченного сверху множества вещественных чисел.

6. Сформулируйте определение ограниченного снизу множества вещественных чисел.

7. Сформулируйте определение неограниченного множества вещественных чисел.

8. Сформулируйте определение неограниченного сверху множества вещественных чисел.

9. Сформулируйте определение неограниченного снизу множества вещественных чисел.

3. ♦♦ Ограниченные функции, определения

10. Сформулируйте определение функции, ограниченной на заданном множестве.

11. Сформулируйте определение функции, ограниченной сверху заданном множестве.

12. Сформулируйте определение функции, ограниченной снизу на заданном множестве.

13. Сформулируйте определение функции, неограниченной на заданном множестве.

14. Сформулируйте определение функции, неограниченной сверху на заданном множестве.

15. Сформулируйте определение функции, неограниченной снизу на заданном множестве.

4. ♦♦ Верхняя и нижняя грани функции, определения

16. Сформулируйте определение верхней грани функции на множестве.

17. Сформулируйте определение нижней грани функции на множестве.

18. Сформулируйте определение точной верхней грани функции на множестве.

19. Сформулируйте определение точной нижней грани функции на множестве.

5. ♦♦ Предел функции, определения

20. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции в точке $x = a$.

21. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

22. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.

23. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to a + 0$.

24. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$".

25. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to +\infty$".

26. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to -\infty$".

6. ♦♦ Бесконечно малые функции, определения

27. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to a$.

28. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to +\infty$.

29. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to -\infty$.

1.5.1.2. Вопрос 2, определение k1s1m1-q1-N2

1. ♦♦ Возрастающие и убывающие функции, определения

30. Сформулируйте определение возрастающей на множестве функции.

31. Сформулируйте определение убывающей на множестве функции.

2. ♦♦ Непрерывные функции, определения

32. Сформулируйте определение непрерывной в точке функции.

33. Сформулируйте определение непрерывной на промежутке функции.

3. ♦♦ Точки разрыва функции, определения

34. Сформулируйте определение точки разрыва первого рода.

35. Сформулируйте определение точки разрыва второго рода.

36. Сформулируйте определение устранимой точки разрыва.

4. ♦♦ Вопрос 2, определение с отрицанием

37. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to b$ при $x \to a$".

38. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$".

39. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to b$ при $x \to -\infty$".

40. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to +\infty$ при $x \to a+0$".

41. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$".

1.5.1.3. Вопрос 3–задача теоретического характера k1s1m1-q1-N3

1. ♦♦ Свойства символа $o(...)$

42. Укажите все значения γ, при которых $x^5 + x^\gamma = o(x^2)$ при $x \to +0$.

43. Укажите все значения γ, при которых $x^4 + x^\gamma = o(x^3)$ при $x \to +0$.

44. Укажите все значения γ, при которых $x^3 + x^\gamma = o(x^2)$ при $x \to +0$.

45. Укажите все значения γ, при которых $x^5 + x^\gamma = o(x^4)$ при $x \to +0$.

46. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o(x^{-7})$ при $x \to +\infty$.

47. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o(x^{-3})$ при $x \to +\infty$.

48. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o(x^{-2})$ при $x \to +\infty$.

49. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o(x^{-3})$ при $x \to +\infty$.

50. Укажите все значения γ, при которых $x^{-3} = o(x^{-\gamma})$ при $x \to +\infty$.

51. Укажите все значения γ, при которых $x^{-2} = o(x^{-\gamma})$ при $x \to +\infty$.

52. Укажите все значения γ, при которых $x^{-3} = o(x^{\gamma})$ при $x \to +\infty$.

53. Укажите все значения γ, при которых $x^{\gamma} = o(x^{-4})$ при $x \to +\infty$.

54. Укажите все значения γ, при которых $x^{-1} = o(x^{-\gamma})$ при $x \to +\infty$.

55. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$.

56. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ при $x \to +\infty$.

57. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$ при $x \to +\infty$.

58. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o\left(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$ при $x \to +\infty$.

59. Укажите все значения γ, при которых $\frac{1}{\sqrt{x}} = o\left(x^{-\gamma}\right)$ при $x \to +\infty$.

60. Укажите все значения γ, при которых $\frac{1}{x\sqrt{x}} = o\left(x^{-\gamma}\right)$ при $x \to +\infty$.

61. Укажите все значения γ, при которых $x^3 = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$.

62. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(x^2)$ при $x \to +0$.

63. Укажите все значения γ, при которых $x^2 = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$.

64. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(x)$ при $x \to +0$.

65. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(x^7)$ при $x \to +0$.

66. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(\sqrt{x})$ при $x \to +0$.

67. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(x\sqrt{x})$ при $x \to +0$.

68. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(x^2\sqrt{x})$ при $x \to +0$.

69. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(\sqrt[3]{x})$ при $x \to +0$.

70. Укажите все значения γ, при которых $\sqrt{x} = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$.

71. Укажите все значения γ, при которых $x\sqrt{x} = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$.

2. ♦♦ Понимание символа $o(...)$

72. Пусть $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения:
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$. $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to 0} xf(x) = 0$. $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

73. Пусть $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения:
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$. $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to 0} xf(x) = 0$. $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

74. Пусть $f(x) = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$. Укажите все верные утверждения.
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$. $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} xf(x) = 0$.
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} x^2 f(x) = 0$. $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} x^3 f(x) = 0$.

75. Пусть $f(x) = o(x^{-2})$ при $x \to +\infty$. Укажите все верные утверждения.
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$. $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} xf(x) = 0$.
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} x^2 f(x) = 0$. $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} x^3 f(x) = 0$.

76. Пусть $f(x) = o(1)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения:
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to 0} xf(x) = 0$.
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$. $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to 0} x^3 f(x) = 0$.

77. Пусть $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения:
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to 0} f(x)$. $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to 0} xf(x) = 0$. $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

3. ♦♦ Доказательство асимптотических формул

78. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

79. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

80. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

81. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

82. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

83. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

84. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

85. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

86. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ при $x \to 0$.

87. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$.

88. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$.

89. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$.

90. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

91. Используя равенства $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, докажите, что $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

92. Используя равенство $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ и определение обратной функции, докажите, что $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

93. Используя равенство $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ и определение обратной функции, докажите, что $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

94. Используя равенства $e^x = 1 + x + o(x)$ и $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, докажите, что $\big(1+x\big)^{\frac{1}{x}} = e\big(1 - \frac{1}{2}x\big) + o(x)$ при $x \to 0$.

95. Используя равенства $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, докажите, что $\big(1+x\big)^{\frac{1}{x}} = e\big(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2\big) + o(x^2)$ при $x \to 0$.

96. Используя равенства $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, докажите, что $\big(1-x\big)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}\big(1 - \frac{1}{2}x\big) + o(x)$ при $x \to 0$.

97. Используя равенства $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, докажите, что $\big(1-x\big)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}\big(1 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{24}x^2\big) + o(x^2)$ при $x \to 0$.

98. Используя равенства $e^x = 1 + x + o(x)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$, докажите, что $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}\left(1 - \dfrac{1}{180}x^2\right) + o(x^2)$ при $x \to 0$.

99. Используя равенства $e^x = 1 + x + o(x)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, докажите, что $\big(\cos x\big)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \dfrac{1}{12}x^2\right) + o(x^2)$ при $x \to 0$.

4. ♦♦ Свойства символа $o(...)$

100. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2 \ln x}$. Укажите все утверждения, верные при $x \to +\infty$:
$\boxed{1}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x\sqrt{x}}\big)$ $\boxed{2}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^2}\big)$ $\boxed{3}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\big)$ $\boxed{4}$ $f(x) = o\big(\frac{\ln x}{x^2}\big)$

101. Пусть $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$. Укажите все утверждения, верные при $x \to +\infty$:
$\boxed{1}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^2}\big)$ $\boxed{2}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\big)$ $\boxed{3}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^3}\big)$ $\boxed{4}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^3 \ln x}\big)$

102. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^3 \ln x}$. Укажите все утверждения, верные при $x \to +\infty$:
$\boxed{1}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\big)$ $\boxed{2}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^3}\big)$ $\boxed{3}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^3\sqrt{x}}\big)$ $\boxed{4}$ $f(x) = o\big(\frac{\ln x}{x^3}\big)$

103. Пусть $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Укажите все утверждения, верные при $x \to +\infty$:
$\boxed{1}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{\sqrt{x}}\big)$ $\boxed{2}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x}\big)$ $\boxed{3}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x\sqrt{x}}\big)$ $\boxed{4}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{\ln x}\big)$

104. Пусть $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Укажите все утверждения, верные при $x \to +\infty$:
$\boxed{1}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x}\big)$ $\boxed{2}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x\sqrt{x}}\big)$ $\boxed{3}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^2}\big)$ $\boxed{4}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\big)$ $\boxed{5}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^3}\big)$ $\boxed{6}$ $f(x) = o\big(\frac{\ln x}{x}\big)$

105. Пусть $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Укажите все утверждения, верные при $x \to +\infty$:
$\boxed{1}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x}\big)$ $\boxed{2}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x\sqrt{x}}\big)$ $\boxed{3}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^2}\big)$ $\boxed{4}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\big)$ $\boxed{5}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^3}\big)$
$\boxed{6}$ $f(x) = o\big(\frac{1}{x^2 \ln x}\big)$

5. ♦♦ Свойства символа $o(...)$

106. Докажите, что $o(x^2) \cdot o(x^3) = o(x^5)$ при $x \to 0$.

107. Докажите, что $o(\sqrt{x}) \cdot o(\sqrt[3]{x}) = o(\sqrt[6]{x^5})$ при $x \to +0$.

108. Докажите, что $o(x^4) \cdot o(x^3) = o(x^7)$ при $x \to 0$.

109. Докажите, что $o(x^5) \cdot o(x^4) = o(x^9)$ при $x \to 0$.

110. Докажите, что $o(\sqrt[4]{x}) \cdot o(\sqrt[3]{x}) = o(\sqrt[12]{x^7})$ при $x \to +0$.

111. Докажите, что $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$ при $x \to 0$.

6. ♦♦ Свойства функций, не имеющих предела

112. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to 0} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

113. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to +\infty} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to +\infty} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to +\infty}\big(f(x) + g(x)\big)$.

114. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to +0} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to +0} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to +0}\big(f(x) \cdot g(x)\big)$.

115. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to +\infty} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to +\infty} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

116. Приведите пример: $\exists \lim_{x\to+0} f(x)$ и $\exists \lim_{x\to+0} g(x)$, но $\nexists \lim_{x\to+0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

117. Приведите пример: $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to+\infty} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$.

118. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to+\infty} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big)$.

119. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to+0} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to+0} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to+0}\big(f(x)-g(x)\big)$.

120. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to+0} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to+0} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to+0}\big(f(x)+g(x)\big)$.

121. Приведите пример: $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to+\infty} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

7. ♦♦ Примеры функций, не имеющих предела

122. Приведите пример ограниченной последовательности, не имеющей предела.

123. Приведите пример возрастающей на $[a,b]$ функции $f(x)$, для которой на отрезке $[c,d]$, $c=f(a)$, $d=f(b)$, не существует обратной функции.

124. Приведите пример определенной и ограниченной на $[-1;1]$ функции $f(x)$, для которой не существует $\lim_{x\to 0} f(x)$.

125. Укажите и классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ на промежутке $(-\infty,+\infty)$.

126. Укажите и классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\frac{x}{\sin x}$ на промежутке $(-3\pi/2, 3\pi/2)$.

127. Укажите и классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\frac{|x|}{x}$ на промежутке $[-1;1]$.

128. Укажите и классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\big(1+x\big)^{\frac{1}{x}}$ на промежутке $[-\frac{1}{2};2]$.

129. Укажите и классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ на промежутке $[-\pi,\pi]$.

130. Укажите и классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\frac{x}{\operatorname{tg} x}$ на промежутке $(-\pi,\pi)$.

131. Укажите и классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\big(1-x\big)^{\frac{1}{x}}$ на промежутке $[-\frac{1}{2};2]$.

8. ♦♦ Прямое доказательство существования предела элементарной функции

132. Укажите наибольшее $\delta : \forall x : 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$, если
$f(x)=5^x,\ a=2,\ b=f(a),\ \varepsilon=11.$

133. Укажите наибольшее $\delta : \forall x : 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$, если
$f(x)=\log_3 x,\ a=81,\ b=f(a),\ \varepsilon=1.$

134. Укажите наибольшее $\delta : \forall x : 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$, если
$f(x)=x^3,\ a=4,\ b=f(a),\ \varepsilon=15.$

135. Укажите наибольшее $\delta : \forall x : 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$, если
$f(x)=\sqrt[3]{x},\ a=64,\ b=f(a),\ \varepsilon=1.$

136. Укажите наибольшее $\delta : \forall x : 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$, если
$f(x)=\sqrt{x},\ a=64,\ b=f(a),\ \varepsilon=2.$

137. Укажите наибольшее $\delta : \forall x : 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$, если
$f(x)=\log_2 x,\ a=64,\ b=f(a),\ \varepsilon=2.$

138. Укажите наибольшее значение δ, при котором $\forall x : 0<|x-a|<\delta$ верно $|f(x)-b|<\epsilon$, если
$f(x)=2x+1,\ a=3,\ b=7,\ \epsilon=0{,}01.$

139. Укажите наибольшее значение δ, при котором $\forall x : 0<|x-a|<\delta$ верно $|f(x)-b|<\epsilon$, если
$f(x)=3x-2,\ a=3,\ b=7,\ \epsilon=0{,}1.$

140. Укажите наибольшее значение δ, при котором $\forall x : 0<|x-a|<\delta$ верно $|f(x)-b|<\epsilon$, если
$f(x)=x^2,\ a=3,\ b=9,\ \epsilon=0{,}5.$

141. Укажите наибольшее значение δ, при котором $\forall x : 0<|x-a|<\delta$ верно $|f(x)-b|<\epsilon$, если
$f(x)=x^4,\ a=0,\ b=0,\ \epsilon=0{,}001.$

142. Укажите наибольшее значение δ, при котором $\forall x : 0<|x-a|<\delta$ верно $|f(x)-b|<\epsilon$, если
$f(x)=\sin x,\ a=\frac{\pi}{6},\ b=\frac{1}{2},\ \epsilon=0{,}5.$

143. Укажите наибольшее значение δ, при котором $\forall x : 0<|x-a|<\delta$ верно $|f(x)-b|<\epsilon$, если
$f(x)=\cos x,\ a=0,\ b=1,\ \epsilon=0{,}5.$

144. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором $\forall x : 0<|x-a|<\delta$ верно $|f(x)-b|<\epsilon$, если $f(x)=100x-800,\ a=9,\ b=100,\ \epsilon=2.$

145. Укажите наибольшее значение δ, при котором $\forall x : 0 < |x - a| < \delta$ верно $|f(x) - b| < \epsilon$, если $f(x) = \sin x,\ a = 0,\ b = 0,\ \epsilon = 0{,}5$.

1.5.1.4. Вопрос 4–Формулировки теорем k1s1m1-q1-N4

1. ⧫⧫ Формулировки теорем об ограниченных функциях

146. Сформулируйте теорему об ограниченности суммы двух функций на множестве.

147. Сформулируйте теорему об ограниченности произведения двух функций на множестве.

148. Сформулируйте теорему об ограниченности функции, имеющей предел.

2. ⧫⧫ Формулировки теорем о бесконечно малых функциях

149. Сформулируйте теорему о сумме двух бесконечно малых функций в точке.

150. Сформулируйте теорему о произведении двух бесконечно малых функций в точке.

3. ⧫⧫ Формулировки теорем о предельном переходе

151. Сформулируйте теорему о предельном переходе в неравенстве $f(x) \leqslant g(x)$.

152. Сформулируйте теорему о предельном переходе в неравенстве $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

4. ⧫⧫ Формулировки теорем о пределах

153. Сформулируйте теорему о единственности предела функции в точке.

154. Сформулируйте теорему о пределе суммы двух функций в точке.

155. Сформулируйте теорему о пределе произведения двух функций в точке.

156. Сформулируйте теорему о пределе частного от деления двух функций в точке.

5. ⧫⧫ Формулировки теорем о непрерывных функциях

157. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы двух функций в точке.

158. Сформулируйте теорему о непрерывности произведения двух функций в точке.

159. Сформулируйте теорему о непрерывности частного от деления двух функций в точке.

6. ⧫⧫ Формулировки теорем о монотонных функциях

160. Сформулируйте теорему о пределе монотонной последовательности.

161. Сформулируйте теорему о пределе монотонной функции.

7. ⧫⧫ Формулировки теорем о свойствах непрерывных функций

162. Сформулируйте теорему о локальной ограниченности функции, непрерывной в данной точке.

163. Сформулируйте теорему об устойчивости знака функции, непрерывной в данной точке.

164. Сформулируйте теорему о свойстве непрерывной функции, принимающей значения противоположных знаков на концах сегмента $[a,\ b]$.

165. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

166. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.

167. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности обратной функции.

1.5.1.5. Вопрос 5–Теоремы с доказательством k1s1m1-q1-N5

1. ⧫⧫ Теоремы о бесконечно малых с доказательством

168. Докажите, что произведение двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

169. Докажите, что сумма двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

170. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции и ограниченной в окрестности точки $x = a$ функции является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

171. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to +\infty$ функции $f(x)$ и ограниченной на всей числовой оси функции $g(x)$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$ функцией.

2. ⧫⧫ Теоремы об ограниченныхз функциях с доказательством

172. Докажите, что сумма двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.

173. Докажите, что произведение двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.

3. ⧫⧫ Теоремы о пределе функции с доказательством

174. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела функции в точке.

175. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$.

176. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = A - B$.

177. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = AB$.

178. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

4. ⧫⧫ Теоремы о непрерывных функциях с доказательством

179. Сформулируйте и докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.

180. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах отрезка.

181. Сформулируйте и докажите теорему о пределе монотонной последовательности.

182. Сформулируйте и докажите теорему о пределе монотонной функции.

1.5.2. 2012-2013-МГУ-Курс 1, семестр 1, коллоквиум 1, готовые билеты [i101]

1.5.2.1. Комплект 01–21

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, Т529а, Билет k1s1q1-1

1. Сформулируйте определение равных положительных вещественных чисел.

2. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

3. Укажите все значения γ, при которых $x^5 + x^\gamma = o(x^2)$ при $x \to +0$.

4. Сформулируйте теорему об ограниченности суммы двух функций на множестве.

5. Докажите, что произведение двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, Т529а, Билет k1s1q1-2

1. Сформулируйте определение функции, ограниченной на заданном множестве.

2. Укажите все значения γ, при которых $\frac{1}{x\sqrt{x}} = o\big(x^{-\gamma}\big)$ при $x \to +\infty$.

3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему о предельном переходе в неравенстве $f(x) \leqslant g(x)$.

5. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции и ограниченной в окрестности точки $x = a$ функции является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, Т529а, Билет k1s1q1-3

1. Сформулируйте определение функции, неограниченной на заданном множестве.

2. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(\sqrt[3]{x})$ при $x \to +0$.

3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы двух функций в точке.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, Т529а, Билет k1s1q1-4

1. Сформулируйте определение ограниченного снизу множества вещественных чисел.

2. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(\sqrt{x})$ при $x \to +0$.

3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности обратной функции.

5. Сформулируйте и докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, Т529а, Билет k1s1q1-5

1. Сформулируйте правило сравнения положительных вещественных чисел.

2. Укажите все значения γ, при которых $x^2 = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$.

3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему о пределе суммы двух функций в точке.

5. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to +\infty$ функции $f(x)$ и ограниченной на всей числовой оси функции $g(x)$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, Т529а, Билет k1s1q1-6

1. Сформулируйте определение устранимой точки разрыва.

2. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(x^2)$ при $x \to +0$.

3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему о пределе частного от деления двух функций в точке.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = A - B$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-7

1. Сформулируйте определение неограниченного снизу множества вещественных чисел.

2. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(x^7)$ при $x \to +0$.

3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему о предельном переходе в неравенстве $f(x) \leqslant g(x)$.

5. Докажите, что произведение двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-8

1. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

2. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

3. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o\big(\frac{1}{\sqrt{x}}\big)$ при $x \to +\infty$.

4. Сформулируйте теорему о предельном переходе в неравенстве $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = AB$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-9

1. Сформулируйте определение точки разрыва первого рода.

2. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o\big(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\big)$ при $x \to +\infty$.

3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему о единственности предела функции в точке.

5. Докажите, что сумма двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-10

1. Сформулируйте определение точки разрыва второго рода.

2. Укажите все значения γ, при которых $x^3 = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$.

3. Используя равенства $e^x = 1 + x + o(x)$ и $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, докажите, что $\big(1+x\big)^{\frac{1}{x}} = e\big(1 - \frac{1}{2}x\big) + o(x)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему об ограниченности произведения двух функций на множестве.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-11

1. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции в точке $x = a$.

2. Укажите все значения γ, при которых $\sqrt{x} = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$.

3. Используя равенства $e^x = 1 + x + o(x)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, докажите, что $\big(\cos x\big)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}\Big(1 - \dfrac{1}{12}x^2\Big) + o(x^2)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему о сумме двух бесконечно малых функций в точке.

5. Докажите, что произведение двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-12

1. Сформулируйте определение ограниченного сверху множества вещественных чисел.

2. Укажите все значения γ, при которых $x^{-1} = o(x^{-\gamma})$ при $x \to +\infty$.

3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему о пределе произведения двух функций в точке.

5. Докажите, что сумма двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-13

1. Сформулируйте определение непрерывной в точке функции.
2. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$.
3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.
4. Сформулируйте теорему об ограниченности функции, имеющей предел.
5. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции и ограниченной в окрестности точки $x = a$ функции является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-14

1. Сформулируйте определение ограниченного множества вещественных чисел.
2. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ при $x \to +\infty$.
3. Используя равенства $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, докажите, что $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ при $x \to 0$.
4. Сформулируйте теорему о произведении двух бесконечно малых функций в точке.
5. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to +\infty$ функции $f(x)$ и ограниченной на всей числовой оси функции $g(x)$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-15

1. Сформулируйте определение функции, неограниченной сверху на заданном множестве.
2. Укажите все значения γ, при которых $x^{\gamma} = o(x)$ при $x \to +0$.
3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.
4. Сформулируйте теорему о пределе монотонной функции.
5. Докажите, что сумма двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-16

1. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.
2. Укажите все значения γ, при которых $\frac{1}{\sqrt{x}} = o\left(x^{-\gamma}\right)$ при $x \to +\infty$.
3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$.
4. Сформулируйте теорему о непрерывности частного от деления двух функций в точке.
5. Докажите, что произведение двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-17

1. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to a + 0$.
2. Укажите все значения γ, при которых $x^{-3} = o(x^{\gamma})$ при $x \to +\infty$.
3. Используя равенства $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, докажите, что $\left(1 - x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{24}x^2\right) + o(x^2)$ при $x \to 0$.
4. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.
5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\bigl(f(x) - g(x)\bigr) = A - B$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-18

1. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to +\infty$.
2. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o(x^{-7})$ при $x \to +\infty$.
3. Используя равенства $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, докажите, что $\left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2\right) + o(x^2)$ при $x \to 0$.
4. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности обратной функции.
5. Сформулируйте и докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.

Московский Государственный университет **Физический факультет** **Кафедра математики**
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) **Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-19**

1. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to a$.

2. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(x^2\sqrt{x})$ при $x \to +0$.

3. Используя равенства $e^x = 1 + x + o(x)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$, докажите, что $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}\left(1 - \dfrac{1}{180}x^2\right) + o(x^2)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$.

Московский Государственный университет **Физический факультет** **Кафедра математики**
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) **Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-20**

1. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to -\infty$.

2. Укажите все значения γ, при которых $x^3 + x^\gamma = o(x^2)$ при $x \to +0$.

3. Используя равенства $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, докажите, что $\big(1-x\big)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}\big(1 - \frac{1}{2}x\big) + o(x)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему о свойстве непрерывной функции, принимающей значения противоположных знаков на концах сегмента $[a,\ b]$.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = AB$.

1.5.2.2. Комплект 21–45

Московский Государственный университет **Физический факультет** **Кафедра математики**
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) **Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-21**

1. Сформулируйте определение функции, ограниченной сверху заданном множестве.

2. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$".

3. Укажите все значения γ, при которых $x^5 + x^\gamma = o(x^2)$ при $x \to +0$.

4. Сформулируйте теорему о локальной ограниченности функции, непрерывной в данной точке.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Московский Государственный университет **Физический факультет** **Кафедра математики**
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) **Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-22**

1. Сформулируйте определение функции, ограниченной снизу на заданном множестве.

2. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to +\infty$".

3. Укажите все значения γ, при которых $x^4 + x^\gamma = o(x^3)$ при $x \to +0$.

4. Сформулируйте теорему об устойчивости знака функции, непрерывной в данной точке.

5. Сформулируйте и докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.

Московский Государственный университет **Физический факультет** **Кафедра математики**
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) **Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-23**

1. Сформулируйте определение неограниченного множества вещественных чисел.

2. Сформулируйте определение непрерывной на промежутке функции.

3. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$.

4. Сформулируйте теорему о пределе монотонной функции.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = A - B$.

Московский Государственный университет **Физический факультет** **Кафедра математики**
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) **Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-24**

1. Сформулируйте определение неограниченного снизу множества вещественных чисел.

2. Сформулируйте определение возрастающей на множестве функции.

3. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(x\sqrt{x})$ при $x \to +0$.

4. Сформулируйте теорему о непрерывности произведения двух функций в точке.

5. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to +\infty$ функции $f(x)$ и ограниченной на всей числовой оси функции $g(x)$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-25

1. Сформулируйте определение верхней грани функции на множестве.

2. Сформулируйте определение убывающей на множестве функции.

3. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o(x^{-3})$ при $x \to +\infty$.

4. Сформулируйте теорему о пределе частного от деления двух функций в точке.

5. Докажите, что сумма двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-26

1. Сформулируйте определение функции, неограниченной сверху на заданном множестве.

2. Сформулируйте определение точки разрыва второго рода.

3. Укажите все значения γ, при которых $x^{-2} = o(x^{-\gamma})$ при $x \to +\infty$.

4. Сформулируйте теорему о пределе произведения двух функций в точке.

5. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции и ограниченной в окрестности точки $x = a$ функции является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-27

1. Сформулируйте определение нижней грани функции на множестве.

2. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to -\infty$".

3. Укажите все значения γ, при которых $x^5 + x^\gamma = o(x^4)$ при $x \to +0$.

4. Сформулируйте теорему о пределе суммы двух функций в точке.

5. Докажите, что произведение двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-28

1. Сформулируйте определение суммы двух положительных вещественных чисел.

2. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to -\infty$".

3. Укажите все значения γ, при которых $x\sqrt{x} = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$.

4. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы двух функций в точке.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = AB$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-29

1. Сформулируйте правило сравнения положительных вещественных чисел.

2. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

3. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o\big(\frac{1}{x\sqrt{x}}\big)$ при $x \to +\infty$.

4. Сформулируйте теорему о непрерывности частного от деления двух функций в точке.

5. Докажите, что произведение двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-30

1. Сформулируйте определение функции, неограниченной снизу на заданном множестве.

2. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции в точке $x = a$.

3. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(x^{-4})$ при $x \to +\infty$.

4. Сформулируйте теорему о пределе монотонной последовательности.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-31

1. Сформулируйте определение ограниченного снизу множества вещественных чисел.

2. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.

3. Укажите все значения γ, при которых $x^{-1} = o(x^{-\gamma})$ при $x \to +\infty$.

4. Сформулируйте теорему об устойчивости знака функции, непрерывной в данной точке.

5. Докажите, что сумма двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-32

1. Сформулируйте определение функции, неограниченной на заданном множестве.

2. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to a$.

3. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o(x^{-3})$ при $x \to +\infty$.

4. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-33

1. Сформулируйте определение равных положительных вещественных чисел.

2. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to +\infty$.

3. Укажите все значения γ, при которых $x^{-3} = o(x^{-\gamma})$ при $x \to +\infty$.

4. Сформулируйте теорему о свойстве непрерывной функции, принимающей значения противоположных знаков на концах сегмента $[a,\ b]$.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = A - B$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-34

1. Сформулируйте определение ограниченного множества вещественных чисел.

2. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to a + 0$.

3. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o(x^{-2})$ при $x \to +\infty$.

4. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = AB$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-35

1. Сформулируйте определение неограниченного сверху множества вещественных чисел.

2. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$".

3. Укажите все значения γ, при которых $x^3 + x^\gamma = o(x^2)$ при $x \to +0$.

4. Сформулируйте теорему о локальной ограниченности функции, непрерывной в данной точке.

5. Сформулируйте и докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-36

1. Сформулируйте определение положительного вещественного числа.

2. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to -\infty$.

3. Укажите все значения γ, при которых $x^4 + x^\gamma = o(x^3)$ при $x \to +0$.

4. Сформулируйте теорему о пределе монотонной последовательности.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-37

1. Сформулируйте определение неограниченного снизу множества вещественных чисел.
2. Сформулируйте определение точки разрыва второго рода.
3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ при $x \to 0$.
4. Сформулируйте теорему об ограниченности произведения двух функций на множестве.
5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = AB$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-38

1. Сформулируйте определение неограниченного множества вещественных чисел.
2. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции в точке $x = a$.
3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.
4. Сформулируйте теорему о сумме двух бесконечно малых функций в точке.
5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = A - B$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-39

1. Сформулируйте определение ограниченного сверху множества вещественных чисел.
2. Сформулируйте определение точки разрыва первого рода.
3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.
4. Сформулируйте теорему о пределе произведения двух функций в точке.
5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-40

1. Сформулируйте определение положительного вещественного числа.
2. Сформулируйте определение непрерывной в точке функции.
3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.
4. Сформулируйте теорему об ограниченности функции, имеющей предел.
5. Докажите, что произведение двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-41

1. Сформулируйте определение ограниченного множества вещественных чисел.
2. Сформулируйте определение точки разрыва второго рода.
3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$.
4. Сформулируйте теорему о произведении двух бесконечно малых функций в точке.
5. Докажите, что сумма двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-42

1. Сформулируйте определение функции, неограниченной сверху на заданном множестве.
2. Сформулируйте определение устранимой точки разрыва.
3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$.
4. Сформулируйте теорему о пределе монотонной функции.
5. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции и ограниченной в окрестности точки $x = a$ функции является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-43

1. Сформулируйте определение функции, ограниченной сверху заданном множестве.

2. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.

3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему о непрерывности частного от деления двух функций в точке.

5. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to +\infty$ функции $f(x)$ и ограниченной на всей числовой оси функции $g(x)$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-44

1. Сформулируйте определение функции, ограниченной снизу на заданном множестве.

2. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to a+0$.

3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

5. Докажите, что сумма двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Коллоквиум 1 по курсу МА, семестр 1 (2012-2013) Октябрь 2012, T529a, Билет k1s1q1-45

1. Сформулируйте определение функции, неограниченной снизу на заданном множестве.

2. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to +\infty$.

3. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$.

4. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности обратной функции.

5. Докажите, что произведение двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.