Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики
Факультет бизнес-информатики
Математический анализ
Практический курс
Модуль 1 (2011-2012)

А.Быков, boombook@yandex.ru, boombook.narod.ru

Оглавление

1. Математический анализ–1

2011-2012 Курс 1, семестр 1, семинар 00(m1-00)
Тема: Основания математического анализа

1.1. Предел функции

1.1.1. Графики элементарных функций и их преобразования

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Пусть функция $y = f(x)$ задана своим графиком, $a > 0, b > 0, c > 0$ – заданные числа. Нарисуйте графики функций **(1)** $f(x - a)$, **(2)** $f(x) - b$, **(3)** $cf(x)$, **(4)** $f(|x|)$, если $f(x) = x^2 - 6x + 5$, **(5)** $|f(x)|$, если $f(x) = x^2 - 6x + 5$, **(6)** $|f(|x|)|$, если $f(x) = x^2 - 6x + 5$, **(7)** $f(-x)$, если $f(x) = x^2 - 6x + 5$, **(8)** $-f(x)$, если $f(x) = x^2 - 6x + 5$, **(9)** $-f(-x)$. если $f(x) = x^2 - 6x + 5$,

2. Нарисуйте графики **(1)** $f(x) = |x|$, **(2)** $f(x) = |x - 1|$, **(3)** $f(x) = |x - 1| - 1$, **(4)** $f(x) = ||x - 3| - 2| - 1$.

3. Нарисуйте графики **(1)** $f(x) = x^2 - 6x + 5$, **(2)** $f(x) = x^2 - 6|x| + 5$, **(3)** $f(x) = \left|x^2 - 6x + 5\right|$, **(4)** $f(x) = \left|x^2 - 6|x| + 5\right|$, **(5)** $f(x) = x\,|x|$, **(6)** $f(x) = x\,|x - 2|$, **(7)** $f(x) = (x - 1)|x - 5|$.

4. Нарисуйте графики **(1)** $f(x) = \frac{x}{x-1}$, **(2)** $f(x) = x^2 + 1$, **(3)** $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, **(4)** $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, **(5)** $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, **(6)** $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$, **(7)** $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$,

5. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = 2^x$, **(2)** $f(x) = 2^{-x}$.

6. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = 2^x$, **(2)** $f(x) = 4^x$.

7. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = 2^x$, **(2)** $f(x) = x^2$.

8. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = e^x$, **(2)** $f(x) = e^{|x|}$. **(3)** $f(x) = e^{-|x|}$.

9. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = \log_2 x$, **(2)** $f(x) = \log_{0,5} x$.

10. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = \log_2 x$, **(2)** $f(x) = \log_4 x$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

11. Пусть функция $y = f(x)$ задана своим графиком, $a > 0, b > 0, c > 0$ – заданные числа. Нарисуйте графики функций **(1)** $f(x + a)$, **(2)** $f(x) + b$, **(3)** $f(x)/2$, **(4)** $f(|x|)$, если $f(x) = x^2 - 4x + 3$, **(5)** $|f(x)|$, если $f(x) = x^2 - 4x + 3$, **(6)** $|f(|x|)|$, если $f(x) = x^2 - 4x + 3$, **(7)** $f(-x)$,, если $f(x) = x^2 - 4x + 3$, **(8)** $-f(x)$,, если $f(x) = x^2 - 4x + 3$, **(9)** $-f(-x)$,, если $f(x) = x^2 - 4x + 3$,

12. Нарисуйте графики **(1)** $f(x) = |x|$, **(2)** $f(x) = |x + 1|$, **(3)** $f(x) = |x + 1| - 2$, **(4)** $f(x) = ||x + 1| - 3| - 2$.

13. Нарисуйте графики **(1)** $f(x) = x^2 - 5x + 6$, **(2)** $f(x) = x^2 - 5|x| + 6$, **(3)** $f(x) = \left|x^2 - 5x + 6\right|$, **(4)** $f(x) = \left|x^2 - 5|x| + 6\right|$, **(5)** $f(x) = (x - 5)|x - 3|$.

14. Нарисуйте графики **(1)** $f(x) = \frac{x}{x+1}$, **(2)** $f(x) = x^2 + 4$, **(3)** $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, **(4)** $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, **(5)** $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, **(6)** $f(x) = \frac{x}{x^2-4x+3}$, **(7)** $f(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$.

15. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = 3^x$, **(2)** $f(x) = 3^{-x}$.

16. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = 3^x$, **(2)** $f(x) = 9^x$.

17. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = 4^x$, **(2)** $f(x) = x^4$.

18. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x)=2^x$, **(2)** $f(x)=2^{|x|}$.
(3) $f(x)=2^{-|x|}$.

19. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x)=\log_4 x$, **(2)** $f(x)=\log_{0,25} x$.

20. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x)=\log_3 x$, **(2)** $f(x)=\log_9 x$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

21. Пусть $f(x)$–возрастающая функция. Нарисуйте на плоскости (x,y) множества точек **(1)** $x=f(y)$, **(2)** $x=-f(y)$, **(3)** $x=f(-y)$, **(4)** $x=-f(-y)$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

22. Пусть $f(x)$–убывающая функция. Нарисуйте на плоскости (x,y) множества точек **(1)** $x=f(y)$, **(2)** $x=-f(y)$, **(3)** $x=f(-y)$, **(4)** $x=-f(-y)$.

1.1.2. Вычисление производных

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите производные функций **(1)** $f(x)=2x-3$, **(2)** $f(x)=x^2-5x+6$, **(3)** $f(x)=2x^3-3x^2$, **(4)** $f(x)=\frac{1}{x}$, **(5)** $f(x)=\frac{1}{x^4}$, **(6)** $f(x)=\frac{x}{x-1}$, **(7)** $f(x)=\frac{4x-9}{x-3}$, **(8)** $f(x)=\frac{x}{x^2-4x+3}$, **(9)** $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$.

2. Найдите производные функций **(1)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(2)** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,

3. Найдите производные функций **(1)** $f(x)=\sin x$, **(2)** $f(x)=\cos x$, **(3)** $f(x)=\sin 3x$, **(4)** $f(x)=\cos 2x$, **(5)** $f(x)=\sin^2 x$, **(6)** $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$,

4. Найдите производные функций **(1)** $f(x)=e^x$, **(2)** $f(x)=e^{3x}$, **(3)** $f(x)=e^{-x}$, **(4)** $f(x)=xe^x$,

5. Найдите производные функций **(1)** $f(x)=\ln x$, **(2)** $f(x)=x\ln x$, **(3)** $f(x)=\frac{\ln x}{x,}$

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

6. Найдите производные функций **(1)** $f(x)=3x-2$, **(2)** $f(x)=x^2-6x+5$, **(3)** $f(x)=5x^3-3x^5$, **(4)** $f(x)=\frac{1}{x^2}$, **(5)** $f(x)=\frac{x}{x+1}$, **(6)** $f(x)=\frac{x}{x^2-8x+15}$, **(7)** $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$.

7. Найдите производные функций **(1)** $f(x)=\sqrt{x-1}$, **(2)** $f(x)=\sqrt{1+x^2}$,

8. Найдите производные функций **(1)** $f(x)=\sin(-x)$, **(2)** $f(x)=\cos(-x)$, **(3)** $f(x)=\sin 4x$, **(4)** $f(x)=\cos 5x$, **(5)** $f(x)=\sin^3 x$, **(6)** $f(x)=\sin^5 x+\cos^5 x$,

9. Найдите производные функций **(1)** $f(x)=e^{-2x}$, **(2)** $f(x)=xe^{-x}$,

10. Найдите производные функций **(1)** $f(x)=\ln(2x)$, **(2)** $f(x)=x^2\ln x$, **(3)** $f(x)=\frac{x}{\ln x.}$

1.1.3. Решение неравенств, связанных с понятием предела функции, 1

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Укажите все значения параметра δ, при которых $\forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров: **(1)** $f(x)=2x,\ a=3,\ b=f(a)=6,\ \varepsilon=1$. **(2)** $f(x)=2x,\ a=3,\ b=f(a)=6,\ \varepsilon=0{,}1$. **(3)** $f(x)=2x,\ a=3,\ b=f(a)=6,\ \varepsilon=10^{-123}$. **(4)** $f(x)=\frac{3x+2}{2x+3},\ a=1,\ b=f(a)=1,\ \varepsilon=0{,}1$. **(5)** $f(x)=\frac{6}{x},\ a=2,\ b=f(a)=3,\ \varepsilon=1$. **(6)** $f(x)=\frac{6}{x},\ a=2,\ b=f(a)=3,\ \varepsilon=0{,}1$. **(7)** $f(x)=x^2,\ a=2,\ b=f(a)=4,\ \varepsilon=1$. **(8)** $f(x)=3^x,\ a=4,\ b=f(a)=81,\ \varepsilon=1$. **(9)** $f(x)=\sqrt{x},\ a=0,\ b=f(a)=0,\ \varepsilon=1$. **(10)** $f(x)=\sqrt{x},\ a=25,\ b=f(a)=5,\ \varepsilon=1$. **(11)** $f(x)=\log_3 x,\ a=81,\ b=f(a)=4,\ \varepsilon=1$. **(12)** $f(x)=\sin x,\ a=0,\ b=f(a)=0,\ \varepsilon=\frac{1}{2}$. **(13)** $f(x)=\sin x,\ a=\frac{\pi}{6},\ b=f(a)=\frac{1}{2},\ \varepsilon=\frac{1}{2}$. **(14)** $f(x)=\sin x,\ a=\frac{\pi}{6},\ b=f(a)=\frac{1}{2},\ \varepsilon=\frac{1}{10}$. **(15)** $f(x)=\sin x,\ a=\frac{\pi}{2},\ b=f(a)=1,\ \varepsilon=\frac{1}{2}$.

(16) $f(x) = \arcsin x,\ a = \frac{\sqrt{3}}{2},\ b = f(a) = \frac{\pi}{3},\ \varepsilon = \frac{\pi}{6}$.
(17) $f(x) = \arcsin x,\ a = 0,\ b = f(a) = 0,\ \varepsilon = \frac{\pi}{6}$.

Д **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Укажите все значения параметра δ, при которых $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.
Сделайте это для следующих функции и параметров: **(1)** $f(x) = \frac{x}{6},\ a = 18,\ b = f(a) = 3,\ \varepsilon = 1$.
(2) $f(x) = \frac{x}{6},\ a = 18,\ b = f(a) = 3,\ \varepsilon = 0{,}1$. **(3)** $f(x) = \frac{x}{6},\ a = 18,\ b = f(a) = 3,\ \varepsilon = 10^{-123}$.
(4) $f(x) = \frac{6x+1}{x+1},\ a = 4,\ b = f(a) = 5,\ \varepsilon = 0{,}1$. **(5)** $f(x) = \frac{36}{x^2},\ a = 2,\ b = f(a) = 9,\ \varepsilon = 1$.
(6) $f(x) = \frac{36}{x^2},\ a = 2,\ b = f(a) = 9,\ \varepsilon = 0{,}1$. **(7)** $f(x) = x^3,\ a = 3,\ b = f(a) = 27,\ \varepsilon = 1$.
(8) $f(x) = 2^x,\ a = 5,\ b = f(a) = 32,\ \varepsilon = 1$. **(9)** $f(x) = \sqrt[3]{x},\ a = 0,\ b = f(a) = 0,\ \varepsilon = 1$.
(10) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ a = 27,\ b = f(a) = 3,\ \varepsilon = 1$. **(11)** $f(x) = \log_2 x,\ a = 32,\ b = f(a) = 5,\ \varepsilon = 1$.
(12) $f(x) = \cos x,\ a = 0,\ b = f(a) = 1,\ \varepsilon = \frac{1}{2}$. **(13)** $f(x) = \cos x,\ a = \frac{\pi}{3},\ b = f(a) = \frac{1}{2},\ \varepsilon = \frac{1}{2}$.
(14) $f(x) = \cos x,\ a = \frac{\pi}{2},\ b = f(a) = 0,\ \varepsilon = \frac{1}{2}$. **(15)** $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ a = \sqrt{3},\ b = f(a) = \frac{\pi}{3},\ \varepsilon = \frac{\pi}{6}$.
(16) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ a = 0,\ b = f(a) = 0,\ \varepsilon = \frac{\pi}{6}$.

1.1.4. Решение неравенств, связанных с понятием предела функции, 2

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

1. Укажите все значения параметра δ, при которых $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.
Сделайте это для следующих функции и параметров: **(1)** $f(x) = x,\ a = 3,\ b = 4,\ \varepsilon = 2$.
(2) $f(x) = x,\ a = 3,\ b = 4,\ \varepsilon = 0{,}5$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

2. Укажите все значения параметра δ, при которых $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.
Сделайте это для следующих функции и параметров: **(1)** $f(x) = 2^x,\ a = 3,\ b = 9,\ \varepsilon = 2$.
(2) $f(x) = 2^x,\ a = 3,\ b = 9,\ \varepsilon = 0{,}5$.

1.1.5. Решение неравенств, связанных с понятием предела последовательности

С **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Укажите наименьшее значение N : **(1)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < 10^{-4}$. **(2)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < 10^{-14}$.
(3) $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < 10^{-2}$. **(4)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < 10^{-4}$. **(5)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{n+1}{n-1} - 1\right| < 10^{-3}$.

Д **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Укажите наименьшее значение N : **(1)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{1}{n^2}\right| < 10^{-4}$. **(2)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{1}{n^2}\right| < 10^{-14}$.
(3) $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right| < 10^{-2}$. **(4)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right| < 10^{-4}$. **(5)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{4n+3}{2n-1} - 2\right| < 10^{-3}$.

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Укажите наименьшее значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{2n}{n+1} - 1\right| < 10^{-2}$.

4. Укажите наименьшее значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{40n^2+7}{8n^2+3} - 5\right| < 10^{-4}$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

5. Укажите наименьшее значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{2n^2}{n^2+4} - 2\right| < 10^{-4}$.

6. Укажите наименьшее значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{42n^2+58}{7n^2+5} - 6\right| < 10^{-4}$.

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

7. Укажите какое нибудь значение N : **(1)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^n} < 10^{-2}$.
(2) $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \frac{1}{n!} < 10^{-4}$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

8. Укажите какое нибудь значение N : **(1)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \frac{1}{3^n} < 10^{-2}$.
(2) $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \frac{1}{n^n} < 10^{-10}$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

9. Укажите какое нибудь значение N : **(1)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \frac{n^3}{3^n} < 10^{-4}$.
(2) $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \frac{3^n}{n!} < 10^{-4}$. **(3)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \frac{n!}{n^n} < 10^{-4}$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

10. Укажите какое нибудь значение N : **(1)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \frac{n^2}{2^n} < 10^{-4}$.
(2) $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \frac{2^n}{n!} < 10^{-4}$. **(3)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \frac{n!}{n^n} < 10^{-2}$.

1.1.6. Решение неравенств с помошью формулы бинома Ньютона

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

1. Укажите какое нибудь значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{n} - 1 < 10^{-3}$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

2. Укажите какое нибудь значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{n} - 1 < 10^{-5}$.

1.1.7. Решение неравенств, связанных с понятием ограниченной функции

С **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Укажите все значения параметра A, при которых $\forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leqslant A$.
(1) $f(x) = x,\ X = [-11;\ 11]$. **(2)** $f(x) = \sqrt{x},\ X = [-144;\ 144]$. **(3)** $f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(4) $f(x) = \sin x,\ X = (-\infty;\ +\infty)$. **(5)** $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ X = (-\infty;\ +\infty)$.

Д **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Укажите все значения параметра A, при которых $\forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leqslant A$.
(1) $f(x) = 3x,\ X = [-11;\ 11]$. **(2)** $f(x) = \sqrt[3]{x},\ X = [-27;\ 27]$. **(3)** $f(x) = \cos x,\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(4) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2},\ X = (-\infty;\ +\infty)$. **(5)** $f(x) = \pi + \operatorname{arctg} x,\ X = (-\infty;\ +\infty)$.

1.1.8. Решение неравенств, связанных с понятием неограниченной функции

С **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Докажите, что $\forall A\ \exists x \in X : |f(x)| > A$.
(1) $f(x) = x,\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(2) $f(x) = x^2,\ X = (-\infty;\ +\infty)$. **(3)** $f(x) = \frac{x}{1\,000\,000},\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(4) $f(x) = \sqrt{x},\ X = (-\infty;\ +\infty)$. **(5)** $f(x) = \frac{x+1}{x-1},\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(6) $f(x) = \log_2 x,\ X = (0;\ +\infty)$. **(7)** $f(x) = 2^x,\ X = (-\infty;\ +\infty)$.

Д **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Докажите, что $\forall A\ \exists x \in X : |f(x)| > A$.
(1) $f(x) = 2x,\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(2) $f(x) = x^3,\ X = (-\infty;\ +\infty)$. **(3)** $f(x) = \frac{x}{1\,234\,567\,890},\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(4) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ X = (-\infty;\ +\infty)$. **(5)** $f(x) = \frac{2x+3}{3x+2},\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(6) $f(x) = \log_3 x,\ X = (0;\ +\infty)$. **(7)** $f(x) = 3^{-x},\ X = (-\infty;\ +\infty)$.

1.1.9. Графики элементарных функций

С **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. **(1)** $f(x) = x^2 - 5x + 6$, **(2)** $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, **(3)** $f(x) = 3x^5 - 5x^3$,
(4) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, **(5)** $f(x) = x^2(5-x)^3$,

Д Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. **(1)** $f(x) = x^2 - 6x + 5$, **(2)** $f(x) = 5x^3 - 3x^5$, **(3)** $f(x) = (x^2 - 6x + 5)^2$, **(4)** $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$, **(5)** $f(x) = x(3 - x)^2$,

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. **(1)** $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, **(2)** $f(x) = x\sqrt{3 - x}$, **(3)** $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$,

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

4. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. **(1)** $f(x) = \frac{2x}{4+x^2}$, **(2)** $f(x) = x\sqrt[3]{4 - x}$, **(3)** $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$,

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

5. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. **(1)** $f(x) = xe^{-x}$, **(2)** $f(x) = x^2 \ln x$, **(3)** $f(x) = 2e^{3x} - 3e^{2x}$,

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

6. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. **(1)** $f(x) = x^2e^{-x}$, **(2)** $f(x) = x \ln x$, **(3)** $f(x) = 3e^{4x} - 4e^{3x}$,

2011-2012 Курс 1, семестр 1, семинар 01(m1-01)
Тема: Предел функции

1.2. Понятие предела функции

1.2.1. Определение предела функции по Коши

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x) = 2x+1,\ a = 3,\ b = 7,\ \epsilon = 0,01$. Ответ должен быть обоснован.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x) = 3x-2,\ a = 3,\ b = 7,\ \epsilon = 0,01$. Ответ должен быть обоснован.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Укажите наибольшее значение числа δ, при котором $\forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \epsilon$ для следующих функции и параметров: $f(x) = \sqrt[3]{x},\ a = 27,\ b = 3,\ \epsilon = 1$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x) = \sqrt[5]{x},\ a = 32,\ b = 2,\ \epsilon = 10^{-2}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

5. Укажите наибольшее $\delta : \forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$, если
$f(x) = 5^x,\ a = 2,\ b = f(a),\ \varepsilon = 100$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

6. Укажите наибольшее $\delta : \forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$, если
$f(x) = \log_3 x,\ a = 81,\ b = f(a),\ \varepsilon = 1$.

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

7. Укажите такое $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ найдется такое число $x : 0 < |x-a| < \delta$, что $|f(x)-b| \geqslant \epsilon$, для следующих функции и параметров: **(1)** $f(x) = x,\ a = 3,\ b = 4$.
(2) $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $a = 0$, $b = 0$. **(3)** $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $a = 0$, $b = 0$.

8. Укажите такое $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ и для любого числа b найдется такое число $x : 0 < |x-a| < \delta$, что $|f(x)-b| \geqslant \epsilon$, для следующих функции и параметров:
(1) $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $a = 0$. **(2)** $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $a = 0$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

9. Укажите такое $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ найдется такое число $x : 0 < |x-a| < \delta$, что $|f(x)-b| \geqslant \epsilon$, для следующих функции и параметров: **(1)** $f(x) = x^2,\ a = 3,\ b = 8$.
(2) $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $a = 0$, $b = 1$. **(3)** $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 0$, $b = 1$.

10. Укажите такое $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ и для любого числа b найдется такое число $x : 0 < |x-a| < \delta$, что $|f(x)-b| \geqslant \epsilon$, для следующих функции и параметров:
(1) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$, $a = 2$. **(2)** $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 0$.

1.2.2. Прямое вычисление предела функции в точке

С Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, **(2)** $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$, **(3)** $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$.

2. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$,
(3) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x-2})$,

3. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt{9+x}}{x}$,

4. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$, **(3)** $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[12]{x}-1}$, **(4)** $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}$,
(5) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{\sqrt{x+6}-3}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+8}-2}$,

Д Простые задачи для самостоятельного решения.

5. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$, **(2)** $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$,

6. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})$,
(3) $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2})$,

7. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[4]{16+x}}{x}$,

8. $\star$ Найдите **(1)** $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt[3]{x+9}-3}$, **(3)** $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$, **(4)** $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}$,

1.2.3. Прямое вычисление предела функции в бесконечно удаленной точке

С Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x^2-1}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^3-1}$.

2. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty}x^2(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3-2})$,

Д Простые задачи для самостоятельного решения.

3. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+1}$.

4. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt{9+x}}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2})$.

1.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

1. Каждая элементарная функция, $x^\alpha, \frac{ax+b}{cx+d}, |x|$,
$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x,\ \log_a x, b^x$, а также композиция элементарных функций, имеет конечный предел во всех внутренних точках области определения, равный ее значению в этой точке. Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции.
(1) $f(x)=\operatorname{tg} x,\ x\to 0$. **(2)** $f(x)=\operatorname{tg} x,\ x\to\pi$. **(3)** $f(x)=\sin x,\ x\to 0$. **(4)** $f(x)=x\sin x,\ x\to 0$.
(5) $f(x)=\frac{1}{\sin x},\ x\to+0$. **(6)** $f(x)=\sin\frac{1}{x},\ x\to+\infty$. **(7)** $f(x)=\ln x,\ x\to 1$.
(8) $f(x)=\ln x,\ x\to+\infty$. **(9)** $f(x)=x^2\ln x,\ x\to+\infty$. **(10)** $f(x)=x^{-1},\ x\to+\infty$.
(11) $f(x)=\operatorname{arctg} x,\ x\to+\infty$. **(12)** $f(x)=\frac{x}{\operatorname{arctg} x},\ x\to+\infty$. **(13)** $f(x)=x^2\operatorname{arctg} x,\ x\to+\infty$.
(14) $f(x)=\frac{\sin x}{x},\ x\to+\infty$. **(15)** $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+5},\ x\to+\infty$. **(16)** $f(x)=\frac{x^2+6}{x^3+5},\ x\to+\infty$.
(17) $f(x)=\frac{x^3+6}{x^2+5},\ x\to+\infty$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

2. Каждая элементарная функция, $x^\alpha, \frac{ax+b}{cx+d}, |x|$,
$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x,\ \log_a x, b^x$, а также композиция

элементарных функций, имеет конечный предел во всех внутренних точках области определения, равный ее значению в этой точке. Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции.
(1) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \to \frac{\pi}{4}$. **(2)** $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \to \frac{\pi}{2}$. **(3)** $f(x) = \sin x,\ x \to \pi$. **(4)** $f(x) = x \operatorname{tg} x,\ x \to 0$.
(5) $f(x) = \frac{1}{\sin x},\ x \to \frac{\pi}{2}$. **(6)** $f(x) = \sin \frac{1}{x^2},\ x \to +\infty$. **(7)** $f(x) = \ln(x+1),\ x \to 0$.
(8) $f(x) = \ln x,\ x \to +0$. **(9)** $f(x) = x \ln x,\ x \to +\infty$. **(10)** $f(x) = x^{-2},\ x \to +\infty$.
(11) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \to 0$. **(12)** $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x},\ x \to +\infty$. **(13)** $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x},\ x \to +0$.
(14) $f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x},\ x \to 0$. **(15)** $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2},\ x \to +\infty$. **(16)** $f(x) = \frac{x+6}{x^2+5},\ x \to +\infty$.
(17) $f(x) = \frac{x^2+6}{x+5},\ x \to +\infty$.

1.4. Свойства пределов

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**
1. Постройте отрицание: $\exists \varepsilon > 0 : \forall N\ \exists n \geqslant N, \exists m \geqslant N : |x_n - x_m| \geqslant \varepsilon$.
2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – функции, определенные в окрестности точки a. Укажите все верные утверждения (все пределы при $x \to a$).
(a) Если $f(x)$ имеет предел и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) + g(x)$ имеет предел
(b) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) + g(x)$ не имеет предела
(c) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ не имеет предела, то $f(x) + g(x)$ не имеет предела
(d) Если $f(x) + g(x)$ имеет предел и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ не имеет предела
(e) Если $f(x) + g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ имеет предел, то $g(x)$ не имеет предела
(f) Если $f(x) + g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ может иметь и может не иметь предел
Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**
3. Постройте отрицание: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N, \forall p \geqslant 1 \Rightarrow |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.
4. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – функции, определенные в окрестности точки a. Укажите все верные утверждения. Все пределы при $x \to a$.
(a) Если $f(x) - g(x)$ имеет предел и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ не имеет предела
(b) Если $f(x) - g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ имеет предел, то $g(x)$ не имеет предела
(c) Если $f(x) - g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ может иметь и может не иметь предел
(d) Если $f(x)$ имеет предел и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) - g(x)$ имеет предел
(e) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) - g(x)$ не имеет предела
(f) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ не имеет предела, то $f(x) - g(x)$ не имеет предела

1.5. Односторонние пределы

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**
1. Найдите односторонние пределы $\lim_{x\to a-0} f(x)$, $\lim_{x\to a+0} f(x)$. Существует ли $\lim_{x\to a} f(x)$, если **(1)** $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $a = 0$. **(2)** $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$, $a = 3$. **(3)** $f(x) = \frac{|x^2-5x+6|}{x-2}$, $a = 2$.
(4) $f(x) = \frac{|x^2-5x+6|}{|x^2-7x+12|}$, $a = 3$.
Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**
2. Найдите односторонние пределы $\lim_{x\to a-0} f(x)$, $\lim_{x\to a+0} f(x)$. Существует ли $\lim_{x\to a} f(x)$, если **(1)** $f(x) = \frac{x}{x^2-|x|}$, $a = 0$. **(2)** $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{x-3}$, $a = 3$. **(3)** $f(x) = \frac{|x^2-6x+5|}{x-1}$, $a = 1$.
(4) $f(x) = \frac{|x^2-4x+3|}{|x^2-9x+18|}$, $a = 3$.

2011-2012 Курс 1, семестр 1, семинар 02(m1-02)
Тема: Бесконечно малые функции

1.6. Сравнение функций в точке

Соглашение об асимптотических формулах. При решении задач этого и всех последующих разделов можно использовать формулы
(1) $\sin x = x + o(x)$, $\sin x = x + o(x^2)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$,
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$,
(2) $\arcsin x = x + o(x^2)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$,
(3) $\cos x = 1 + o(x)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$,
(4) $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$,
(5) $\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$,
(6) $\frac{1}{1-x} = 1 + o(1)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$,
(7) $\frac{1}{1+x} = 1 + o(1)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$,
(8) $\sqrt{1+x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$,
(9) $\sqrt{1-x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$,
(10) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$,
(11) $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$,
(12) $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,
$\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,
(13) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$,
(14) $e^x = 1 + x + o(x)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^{-x} = 1 - x + o(x)$,
$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,
(15) $(1+x)^p = 1 + px + o(x)$, $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2)$,
$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-1)}{6}x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.
Эти формулы называются "асимптотическими формулами". Каждая из этих формул является также "формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано". Можно использовать формулы первого и второго замечательных пределов, $\frac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$,
$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$ при $x \to 0$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e + o(1)$ при $x \to +\infty$, а также формулы
$(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, $x^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$. Доказательство каждой из этих формул будет дано в соответствующем месте нашего курса.

1.6.1. Понятие бесконечно малой функции более высокого порядка малости в точке

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**
1. Пусть $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
(b) $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. **(c)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 0$. **(d)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = 0$.
(e) $\exists A,\ \exists \delta > 0 : \forall x :\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A$. **(f)** $\exists A,\ \exists \delta > 0 : \forall x :\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A|x|$.
$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**
2. Пусть $f(x) = o(1)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
(b) $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. **(c)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 0$. **(d)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = 0$.
(e) $\exists A,\ \exists \delta > 0 : \forall x :\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A$. **(f)** $\exists A,\ \exists \delta > 0 : \forall x :\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A|x|$.

1.6.2. Сравнение бесконечно малых функций в точке

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Является ли верным утверждение: **(1)** $x = o(1)$ при $x \to 0$, **(2)** $x = o(x^2)$ при $x \to 0$, **(3)** $x^3 = o(x^2)$ при $x \to 0$, **(4)** $(1+x)^2 = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, **(5)** $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(6)** $\frac{1}{1+x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, **(7)** $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ при $x \to 0$, **(8)** $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Является ли верным утверждение: **(1)** $x^2 = o(1)$ при $x \to 0$, **(2)** $x^2 = o(x^3)$ при $x \to 0$, **(3)** $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, **(4)** $(1+x)^2 = 1 + 2x + o(x)$ при $x \to 0$, **(5)** $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(6)** $\frac{1}{1-x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, **(7)** $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$, **(8)** $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

1.6.3. Сравнение бесконечно малых функций в бесконечно удаленной точке

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Является ли верным утверждение: **(1)** $x^{-1} = o(1)$ при $x \to +\infty$, **(2)** $x^{-2} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Является ли верным утверждение: **(1)** $x^{-2} = o(1)$ при $x \to +\infty$, **(2)** $x^{-3} = o(x^{-2})$ при $x \to +\infty$.

1.6.4. Асимптотические формулы для тригонометрических функций

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Является ли верным утверждение: **(1)** $\operatorname{tg} x = o(1)$ при $x \to 0$, **(2)** $\sin x = x + o(x)$ при $x \to 0$, **(3)** $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(4)** $\sin x = x + o(x)$ при $x \to +\infty$, **(5)** $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(6)** $\cos x = 1 + o(x)$ при $x \to 0$, **(7)** $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Является ли верным утверждение: **(1)** $\sin x = o(1)$ при $x \to 0$, **(2)** $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ при $x \to 0$, **(3)** $\sin x = x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(4)** $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ при $x \to +\infty$, **(5)** $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to +\infty$, **(6)** $\cos x = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, **(7)** $\cos x = 1 + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(8)** $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

1.6.5. Асимптотические формулы для иррациональных функций

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Является ли верным утверждение: **(1)** $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$, **(2)** $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(1)$ при $x \to 0$, **(3)** $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$ при $x \to 0$, **(4)** $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2 + o(x)$ при $x \to 0$, **(5)** $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \frac{2x}{3} + o(x)$ при $x \to 0$, **(6)** $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Является ли верным утверждение: **(1)** $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(1)$ при $x \to +\infty$, **(2)** $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$ при $x \to +\infty$, **(3)** $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = o(1)$ при $x \to +\infty$, **(4)** $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, **(5)** $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = o(1)$ при $x \to +\infty$, **(6)** $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = x^{-1} + o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$.

1.6.6. Доказательство асимптотических формул

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Докажите, не пользуясь ни формулой Тейлора, ни правилом Лопиталя, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ при $x \to 0$.

2. Докажите, не пользуясь ни формулой Тейлора, ни правилом Лопиталя,
(1) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, **(2)** $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, $x \to 0$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

3. Докажите, не пользуясь ни формулой Тейлора, ни правилом Лопиталя, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, $x \to 0$.

4. Докажите, не пользуясь ни формулой Тейлора, ни правилом Лопиталя,
(1) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, **(2)** $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$, $x \to 0$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

5. Не пользуясь формулой Тейлора докажите, что $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

6. Не пользуясь формулой Тейлора докажите, что $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

7. Не пользуясь формулой Тейлора докажите, что $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

8. Не пользуясь формулой Тейлора докажите, что $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x)$ при $x \to 0$.

1.6.7. Асимптотические формулы с заменой переменной

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Запишите асимптотическую формулу вида $f(x) = A + Bx + o(x)$ при $x \to 0$, если
(1) $f(x) = \frac{1}{1+2x}$, **(2)** $f(x) = \sqrt{1-3x}$, **(3)** $f(x) = \ln 1 + 4x$, **(4)** $f(x) = \sin 5x$, **(5)** $f(x) = \arcsin 6x$, **(6)** $f(x) = e^{7x}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Запишите асимптотическую формулу вида $f(x) = A + Bx + o(x)$ при $x \to 0$, если
(1) $f(x) = \frac{1}{1-6x}$, **(2)** $f(x) = \sqrt{1+5x}$, **(3)** $f(x) = \ln 1 - 3x$, **(4)** $f(x) = \sin 2x$, **(5)** $f(x) = \arcsin 4x$, **(6)** $f(x) = e^{-2x}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Запишите асимптотическую формулу вида $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, если
(1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, **(2)** $f(x) = \sqrt{1-2x^2}$, **(3)** $f(x) = \ln(1+x^3)$, **(4)** $f(x) = \sin(5x^2)$,
(5) $f(x) = \arcsin(6x^2)$, **(6)** $f(x) = e^{-7x^3}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Запишите асимптотическую формулу вида $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + o(x^4)$ при $x \to 0$, если
(1) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, **(2)** $f(x) = \sqrt{1+3x^3}$, **(3)** $f(x) = \ln(1-x^2)$, **(4)** $f(x) = \sin(5x^4)$,
(5) $f(x) = \arcsin(2x^3)$, **(6)** $f(x) = e^{2x^4}$.

1.6.8. Применение асимптотических формул для исследования сложной функции

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

1. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, B, C, D, что является верным утверждение
(1) $\sqrt{\cos x} = A + Bx + Cx^2 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\frac{1}{1+\sin x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(3)** $\sin(\operatorname{tg} 2x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

2. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\frac{1}{\cos x} = A + Bx + Cx^2 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(3)** $\operatorname{tg}(\sin 2x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,

2011-2012 Курс 1, семестр 1, семинар 03(m1-03a)
Тема: Первый и второй замечательный предел

1.7. Замечательные пределы

Соглашение об асимптотических формулах. При решении задач этого и всех последующих разделов можно использовать формулы
(1) $\sin x = x + o(x)$, $\sin x = x + o(x^2)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$,
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$,
(2) $\arcsin x = x + o(x^2)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$,
(3) $\cos x = 1 + o(x)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$,
(4) $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$,
(5) $\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$,
(6) $\frac{1}{1-x} = 1 + o(1)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$,
(7) $\frac{1}{1+x} = 1 + o(1)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$,
(8) $\sqrt{1+x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$,
(9) $\sqrt{1-x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$,
(10) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$,
(11) $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$,
(12) $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,
$\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,
(13) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$,
(14) $e^x = 1 + x + o(x)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^{-x} = 1 - x + o(x)$,
$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,
(15) $(1+x)^p = 1 + px + o(x)$, $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2)$,
$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-1)}{6}x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.
Эти формулы называются "асимптотическими формулами". Каждая из этих формул является также "формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано". Можно использовать формулы первого и второго замечательных пределов, $\frac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$ при $x \to 0$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e + o(1)$ при $x \to +\infty$, а также формулы $(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, $x^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$. Доказательство каждой из этих формул будет дано в соответствующем месте нашего курса.

1.7.1. Предел тригонометрических функций

$\boxed{\text{C}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**
1. Используя тригонометрические формулы, найдите **(1)** $\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$,
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+x) - 2\cos a + \cos(a-x)}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2}$.
2. Используя формулу первого замечательного предела, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{3x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$, **(5)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(6)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x}$,
(7) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{x}$, **(8)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x}{x^2}$, **(9)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.
3. Найдите **(1)** $\lim_{x\to +\infty} x \sin \frac{1}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to +\infty} x \sin \frac{1}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to +\infty} x^2 \left(\cos \frac{1}{x} - 1\right)$,
(4) $\lim_{x\to +\infty} x^3 \left(\sin \frac{1}{x} - \operatorname{tg} \frac{1}{x}\right)$,

Д **Простые задачи для самостоятельного решения.**

4. Используя тригонометрические формулы, найдите **(1)** $\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-2\sin a+\sin(a-x)}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$.

5. Используя формулу первого замечательного предела, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 12x}{3x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{2x}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin 2x}{x}$, **(7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x}$, **(8)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-2\cos 2x+\cos x}{x^2}$, **(9)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x-\sin 2x}{x^3}$.

6. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{tg}\frac{1}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty} x^2\sin\frac{1}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty} x^3\big(\sin\frac{2}{x}-2\sin\frac{1}{x}\big)$, **(4)** $\lim_{x\to+\infty} x\big(\sin\frac{1}{x}+\operatorname{tg}\frac{1}{x}\big)$,

1.7.2. Вычисление предела тригонометрических функций с помощью асимптотических формул

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

1. Используя формулы $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$, $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 3x-\sin 4x}{x^3}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos 3x-2\cos 2x}{x^2}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x-3\operatorname{tg} x}{x^3}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} 4x}{x^3}$, **(7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

2. Используя формулы $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$, $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3\sin x}{x^3}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 3x-\sin 5x}{x^3}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+\cos 3x-2\cos 4x}{x^2}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x-2\operatorname{tg} x}{x^3}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x}{x^3}$, **(7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x-\sin x-\sin 2x}{x^3}$.

1.7.3. Второй замечательный предел в конечной точке

С **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\big(1-x\big)^{\frac{1}{x}}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\big(1-x\big)^{\frac{-1}{x}}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\big(1+3x\big)^{\frac{2}{x}}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{1+3x}{1-2x}\big)^{\frac{2}{x}}$,

Д **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\big(1+x\big)^{\frac{1}{x}}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\big(1+x\big)^{\frac{-1}{x}}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\big(1-3x\big)^{\frac{2}{x}}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{3+x}{3-x}\big)^{\frac{1}{x}}$.

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\big(\cos 2x\big)^{3/x^2}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\big)^{3/x^2}$,

4. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\big(1+\ln(1+x)\big)^{1/\ln(1+x)}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\big(\ln(e+x)\big)^{1/x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\big(1+x\big)^{1/\ln(1+x)}$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

5. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{1/x^2}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\big)^{3/x^2}$,

6. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\big(\ln(e+x)\big)^{1/\ln(1+x)}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\big(1+\ln(1+x)\big)^{1/x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\big(1+x\big)^{2/\ln(1+x)}$.

1.7.4. Второй замечательный предел в бесконечно удаленной точке

С **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\frac{1}{x}\big)^{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1-\frac{2}{x}\big)^{3x}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{x+1}{x-1}\big)^{x}$, **(4)** $\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{2x+1}{2x-3}\big)^{x}$, **(5)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\frac{1}{x^2}\big)^{x^2}$, Д **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$, **(4)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x$, **(5)** $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$,

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^x$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^x$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x^2-1}\right)^x$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$.

1.8. Сравнение функций в точке, продолжение

1.8.1. Сравнение бесконечно малых функций (продолжение), произведение бесконечно малых функций

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

1. Докажите, что $o(x^2)\cdot o(x^3)=o(x^5)$ при $x\to 0$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

2. Докажите, что $o(\sqrt{x})\cdot o(\sqrt[3]{x})=o(\sqrt[6]{x^5})$ при $x\to+0$.

1.8.2. Сравнение бесконечно малых функций (продолжение), сумма бесконечно малых функций

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

1. Укажите все значения γ, при которых $o(x^{-3})+o(x^{-5})=o(x^\gamma)$ при $x\to+\infty$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

2. Укажите все значения γ, при которых $o(x^3)+o(x^5)=o(x^\gamma)$ при $x\to+0$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

3. Пусть $\alpha>\beta>0$. Укажите все значенияγ, при которых $o(x^\alpha)+o(x^\beta)=o(x^\gamma)$ при $x\to+0$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

4. Пусть $\alpha<\beta<0$. Укажите все значения γ, при которых $o(x^\alpha)+o(x^\beta)=o(x^\gamma)$ при $x\to+\infty$.

1.9. Применение асимптотических формул для исследования сложной функции

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

1. Используя формулу $\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$ при $x\to 0$, докажите, что $\operatorname{tg}2x=px+qx^3+o(x^4)$ при $x\to 0$ и найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

2. Используя формулу $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$ при $x\to 0$, докажите, что $\sin 2x=px+qx^3+o(x^4)$ при $x\to 0$ и найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

3. Пусть $f(x)=x+2x^2,\ g(x)=2x-x^2$. Докажите, что $\exists p,\ q: f(g(x))=px+qx^2+o(x^2)$ при $x\to 0$. Найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

4. Пусть $f(x)=x+2x^2,\ g(x)=2x-x^2$. Докажите, что $\exists p,\ q: g(f(x))=px+qx^2+o(x^2)$ при $x\to 0$. Найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

2011-2012 Курс 1, семестр 1, семинар 04(m1-04a)
Тема: Непрерывные функции

1.10. Непрерывные функции

Соглашение об асимптотических формулах. При решении задач этого и всех последующих разделов можно использовать формулы
(1) $\sin x = x + o(x)$, $\sin x = x + o(x^2)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$,
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$,
(2) $\arcsin x = x + o(x^2)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$,
(3) $\cos x = 1 + o(x)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$,
(4) $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$,
(5) $\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$,
(6) $\frac{1}{1-x} = 1 + o(1)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$,
(7) $\frac{1}{1+x} = 1 + o(1)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$,
(8) $\sqrt{1+x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$,
(9) $\sqrt{1-x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$,
(10) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$,
(11) $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$,
(12) $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,
$\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,
(13) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$,
(14) $e^x = 1 + x + o(x)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^{-x} = 1 - x + o(x)$,
$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,
(15) $(1+x)^p = 1 + px + o(x)$, $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2)$,
$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-1)}{6}x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.
Эти формулы называются "асимптотическими формулами". Каждая из этих формул является также "формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано". Можно использовать формулы первого и второго замечательных пределов, $\frac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$ при $x \to 0$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e + o(1)$ при $x \to +\infty$, а также формулы $(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, $x^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$. Доказательство каждой из этих формул будет дано в соответствующем месте нашего курса.

1.10.1. Классификация точек разрыва

$\boxed{\text{C}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \frac{x}{x}$, **(2)** $f(x) = \frac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$,
(4) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$, **(5)** $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$, **(6)** $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$, **(7)** $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-4)(x-5)}$,

2. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \frac{\sin x}{\sin 2x}$, **(2)** $f(x) = \frac{x}{|x|}$, **(3)** $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$,
(4) $f(x) = \frac{(x-1)|x-2|}{(x-1)(x-2)}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

3. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x)=\frac{x-3}{x-3}$, **(2)** $f(x)=\frac{1}{\sin x}$, **(3)** $f(x)=\frac{x(x-1)}{x(x-2)}$, **(4)** $f(x)=\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$, **(5)** $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$, **(6)** $f(x)=\frac{x^3+1}{x+1}$,

4. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x)=\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$, **(2)** $f(x)=\frac{|x|}{x}$, **(3)** $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}$, **(4)** $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{(x-2)|x-3|}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

5. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x)=\operatorname{tg} x$, **(2)** $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, **(3)** $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, **(4)** $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, **(5)** $f(x)=\frac{x}{\operatorname{tg} x}$, **(6)** $f(x)=\operatorname{tg} x\cos x$, **(7)** $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, **(8)** $f(x)=\operatorname{tg}\frac{3\pi x}{1+x^2}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

6. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x)=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, **(2)** $f(x)=\cos\frac{1}{x}$, **(3)** $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$, **(4)** $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, **(5)** $f(x)=\frac{x}{\sin x}$, **(6)** $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$, **(7)** $f(x)=x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, **(8)** $f(x)=\operatorname{tg}\frac{5\pi x}{1+x^2}$,

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

7. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x)=e^{-1/x}$, **(2)** $f(x)=(1+x)^{1/x}$, $x>-1$, **(3)** $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$, $0<x<0{,}5$, **(4)** $f(x)=(\cos x)^{1/x^2}$,

8. Известно, что $\lim_{x\to+0} x\ln x=0$, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x)=\ln|x|$, **(2)** $f(x)=x\ln|x|$, **(3)** $f(x)=|x|\ln|x|$, **(4)** $f(x)=\frac{x}{\ln(1+x)}$, **(5)** $f(x)=\frac{x-1}{\ln x}$, **(6)** $f(x)=\frac{x^2-1}{\ln|x|}$, **(7)** $f(x)=\frac{\ln(1+\frac{x}{2})}{\ln(1+x)}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

9. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$, **(2)** $f(x)=x^{\frac{1}{x-1}}$, $x>0$, **(3)** $f(x)=\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$, $0<x<0{,}5$, **(4)** $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$,

10. Известно, что $\lim_{x\to+0} x\ln x=0$, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x)=\ln(x^2)$, **(2)** $f(x)=x\ln(x)^2$, **(3)** $f(x)=\frac{x}{\ln(1+x)}$, **(4)** $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, **(5)** $f(x)=\frac{\ln(x^2)}{x^2-1}$, **(6)** $f(x)=\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}$.

1.7. Сравнение функций в точке (продолжение)

1.10.1. Асимптотические формулы для основных элементарных функций

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. При каких α и β является верным утверждение $f(x)=\alpha+\beta x+o(x)$ при $x\to 0$, если **(1)** $f(x)=(1+x)^2$, **(2)** $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$, **(3)** $f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, **(4)** $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, **(5)** $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, **(6)** $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$. Тот же вопрос для утверждения **(7)** $\sin x=\alpha x+\beta x^3+o(x^3)$, **(8)** $\arcsin x=\alpha x+\beta x^3+o(x^3)$. **(9)** $\ln(1+x)=\alpha x+\beta x^2+o(x^2)$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. При каких α и β является верным утверждение $f(x)=\alpha+\beta x+o(x)$ при $x\to 0$, если **(1)** $f(x)=(1+x)^{-1}$, **(2)** $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, **(3)** $f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$, **(4)** $f(x)=\frac{\ln(1-x)}{x}$, **(5)** $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, **(6)** $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x}$. Тот же вопрос для утверждения **(7)** $\cos x=\alpha+\beta x^2+o(x^2)$, **(8)** $\operatorname{arctg} x=\alpha x+\beta x^3+o(x^3)$, **(9)** $\ln(1-x)=\alpha x+\beta x^2+o(x^2)$.

1.10.2. Применение асимптотических формул для исследования сложной функции

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

1. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение

(1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,

(2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

2. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение

(1) $\sin(\arcsin x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,

(2) $\arcsin(\sin x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

3. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, B, C, D, что является верным утверждение

(1) $\operatorname{tg}(2\sin x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,

(2) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

4. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение

(1) $\sin\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,

(2) $\sin(2\arcsin x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

2011-2012 Курс 1, семестр 1, семинар 05(m1-05a)
Тема: Вычисление производных, уравнение касательной

1.11. Вычисление производной

1.11.1. Прямое вычисление производной

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите производную: **(1)** $f(x)=x$, **(2)** $f(x)=x^2$, **(3)** $f(x)=2x^3+3x^2+6x+12$, **(4)** $f(x)=x^{\pi}$, **(5)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(6)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, **(7)** $f(x)=\frac{1}{x^2}$, **(8)** $f(x)=\frac{1}{1+x}$, **(9)** $f(x)=\frac{2x-3}{3x-2}$, **(10)** $f(x)=\sqrt{x-1}$, **(11)** $f(x)=\sin x$, **(12)** $f(x)=\operatorname{tg} x$, **(13)** $f(x)=\sin(2x)$, **(14)** $f(x)=\ln x$, **(15)** $f(x)=\log_2 x$, **(16)** $f(x)=e^x$, **(17)** $f(x)=\pi^x$, **(18)** $f(x)=2^{-x}$, **(19)** $f(x)=\arcsin x$, **(20)** $f(x)=\arcsin 2x$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Найдите производную: **(1)** $f(x)=x^2-5x+6$, **(2)** $f(x)=x(x-1)$, **(3)** $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$, **(4)** $f(x)=x^{\sqrt{2}}$, **(5)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$, **(6)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, **(7)** $f(x)=\frac{1}{x}$, **(8)** $f(x)=\frac{2}{1-2x}$, **(9)** $f(x)=\frac{4x-1}{x-4}$, **(10)** $f(x)=\sqrt{2x}$, **(11)** $f(x)=\cos x$, **(12)** $f(x)=\operatorname{tg}(2x)$, **(13)** $f(x)=\sin(3x-2)$, **(14)** $f(x)=\ln(2x)$, **(15)** $f(x)=\big(\ln x\big)^2$, **(16)** $f(x)=e^{2x}$, **(17)** $f(x)=2^x$, **(18)** $f(x)=3^{-x}$, **(19)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, **(20)** $f(x)=\operatorname{arctg} 2x$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\frac{x}{\sin x}$, **(2)** $f(x)=\frac{x\sin x}{x+1}$, **(3)** $f(x)=\frac{x}{x^2-3x+2}$, **(4)** $f(x)=x^2\sin x$, **(5)** $f(x)=x\cos x$, **(6)** $f(x)=e^x\cos x$, **(7)** $f(x)=\sqrt{x}\operatorname{tg} x$, **(8)** $f(x)=x^3\sin 2x$, **(9)** $f(x)=x\ln x$, **(10)** $f(x)=\frac{x}{\ln x}$, **(11)** $f(x)=x^2\cdot 2^x$, **(12)** $f(x)=\frac{e^x}{x}$, **(13)** $f(x)=x\arcsin x$, **(14)** $f(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\frac{1}{\sin x}$, **(2)** $f(x)=\frac{3x+2}{2\sin x+3}$, **(3)** $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+1}$, **(4)** $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$, **(5)** $f(x)=x\operatorname{tg} x$, **(6)** $f(x)=xe^x$, **(7)** $f(x)=x^2e^{-x}$, **(8)** $f(x)=\sqrt[3]{x}\sin x$, **(9)** $f(x)=x^2\cos 3x$, **(10)** $f(x)=x^2\ln x$, **(11)** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, **(12)** $f(x)=x^3\cdot 3^x$, **(13)** $f(x)=\frac{x}{e^x}$, **(14)** $f(x)=x\operatorname{arctg} x$, **(15)** $f(x)=\frac{x}{\arcsin x}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

5. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, **(2)** $f(x)=\sin\sqrt{x}$, **(3)** $f(x)=\ln(2\sqrt{e^x})$, **(4)** $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$, **(5)** $f(x)=\sqrt{\operatorname{arctg} x}$, **(6)** $f(x)=e^{\sqrt{-x}}$, **(7)** $f(x)=\big|x^2-5x+6\big|$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

6. Найдите производную: **(1)** $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$, **(2)** $f(x)=\cos\sqrt{x}$, **(3)** $f(x)=\ln(2\sqrt{e^{-2x}})$, **(4)** $f(x)=\sqrt{\arcsin x}$, **(5)** $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, **(6)** $f(x)=\sqrt{e^x}$, **(7)** $f(x)=\big|x^2-1\big|$.

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

7. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\sqrt{x^2}$, **(2)** $f(x)=\big(\sqrt{x}\big)^2$, **(3)** $f(x)=\arcsin\sin x$, **(4)** $f(x)=\sin\arcsin x$, **(5)** $f(x)=e^{\ln|x|}$, **(6)** $f(x)=\ln e^x$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

8. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\sqrt[4]{x^4}$, **(2)** $f(x)=\big(\sqrt[4]{x}\big)^4$, **(3)** $f(x)=\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x$, **(4)** $f(x)=\operatorname{tg}\operatorname{arctg} x$, **(5)** $f(x)=2^{\log_2|x|}$, **(6)** $f(x)=\log_2 2^x$.

1.11.2. Вычисление производной функции в особой точке

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите производную функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ **(2)** $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ **(3)** $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

2. Найдите производную функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{tg} x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ **(2)** $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{при } x > 0, \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ **(3)** $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

3. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x = 0$ и $f'(0) = 0$.

4. Пусть $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln|x|} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x = 0$ и $f'(0) = 0$.

5. Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^5} & \text{если } x > 0, \\ e^{1/x^5} & \text{если } x < 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Найдите $f'(0)$.

6. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x\bigl(1+x\bigr)^{\frac{1}{x}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

7. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{x+1}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

8. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x \to 0} f'(x)$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

9. Пусть $f(x) = \begin{cases} x \ln|x| & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\nexists f'(x)$ при $x = 0$

10. Пусть $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln|x|} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\nexists f'(x)$ при $x = 0$.

11. Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^4} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0, \end{cases}$ Найдите $f'(0)$.

12. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{1-2x}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

13. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{1+\sqrt{2x}}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

14. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$.

1.11.3. Касательная

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, если
(1) $f(x) = x^7$, $x_0 = 14$, **(2)** $\star f(x) = x^{2007}$, $x_0 = 4014$, **(3)** $f(x) = \frac{4}{x}$, $x_0 = 2$, **(4)** $f(x) = \frac{81}{x^3}$, $x_0 = 3$, **(5)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, **(6)** $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, **(7)** $f(x) = x^2 e^{-x}$, $x_0 = 2$, **(8)** $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $x_0 = 1$, **(9)** $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, **(10)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = e$, **(11)** $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$, $x_0 = e^2$, **(12)** $f(x) = \left(\ln x\right)^2$, $x_0 = 1$, **(13)** $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = \frac{1}{2}$, **(14)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, **(15)** $f(x) = \cos(2\arccos x)$, $x_0 = \frac{1}{2}$, **(16)** $f(x) = \sin(3\arcsin x)$, $x_0 = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, если
(1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 6$, **(2)** $f(x) = \frac{2}{x}$, $x_0 = 2$, **(3)** $f(x) = \frac{4}{x^2}$, $x_0 = -2$, **(4)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 36$, **(5)** $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{5\pi}{6}$, **(6)** $f(x) = xe^{-x}$, $x_0 = 1$, **(7)** $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$, $x_0 = 1$, **(8)** $f(x) = \ln(1-x)$, $x_0 = 0$, **(9)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$, **(10)** $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $x_0 = e$, **(11)** $f(x) = x\left(\ln x\right)^2$, $x_0 = 1$, **(12)** $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, **(13)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$, **(14)** $f(x) = \sin(2\arcsin x)$, $x_0 = \frac{3}{5}$, **(15)** $f(x) = \cos(3\arccos x)$, $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Напишите уравнение правосторонней касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, если **(1)** $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, **(2)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$, **(3)** $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = -1$, **(4)** $f(x) = x\ln x$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Напишите уравнение правосторонней касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, если **(1)** $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$, $x_0 = 2$, **(2)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$, **(3)** $f(x) = \arcsin(x^2)$, $x_0 = -1$, **(4)** $f(x) = x^2\ln x$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$,

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

5. Напишите уравнение правосторонней касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, если **(1)** $f(x) = x\left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}}$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

6. Напишите уравнение правосторонней касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, если **(1)** $f(x) = x\left(1 - x\right)^{\frac{1}{x}}$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$,

1.11.4. Применение производной для исследования корней нелинейных уравнений

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

1. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^4 - p = \frac{28}{x}$ имеет ровно два различных корня. Найдите меньший корень.

2. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^8 + \frac{72}{x} = p$ имеет ровно два различных корня. Найдите больший корень.

3. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\operatorname{tg} x = 7\sin x - p$ имеет единственный корень на промежутке $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите этот корень.

4. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $e^{7x} = pe^x - 1$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

5. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\ln x = px^5$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

6. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $e^{11x} + 1 = pe^{3x}$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

7. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^6 - p = \frac{48}{x}$ имеет ровно два различных корня. Найдите меньший корень.

8. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^{10} + \frac{250}{x} = p$ имеет ровно два различных корня. Найдите больший корень.

9. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\operatorname{ctg} x = 8\cos x - p$ имеет единственный корень на промежутке $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите этот корень.

10. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $3e^{-2x} = p - 2e^{3x}$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

11. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $\ln x = 4x^{12} - p$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

12. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $3e^{-2x} = p - 2e^{3x}$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

1.11.5. Вычисление старших производных

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x) = x^m$, $m > n$, $m, n \in \mathcal{N}$, **(2)** $f(x) = e^{2x}$, **(3)** $f(x) = \cos x$, **(4)** $f(x) = \sin 3x$, **(5)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$, **(6)** $f(x) = \ln x$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x) = x^m$, $m < n$, $m, n \in \mathcal{N}$, **(2)** $f(x) = x^m$, $m = n$, $m, n \in \mathcal{N}$, **(3)** $f(x) = e^{-3x}$, **(4)** $f(x) = \sin x$, **(5)** $f(x) = \frac{1}{x}$,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x) = \sqrt{x}$, **(2)** $f(x) = xe^{-x}$, **(3)** $f(x) = x\cos x$, **(4)** $f(x) = x^2e^x$, **(5)** $f(x) = x^2\cos 2x$. **(6)** $f(x) = x\ln x$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$, **(2)** $f(x) = xe^x$, **(3)** $f(x) = x\sin x$, **(4)** $f(x) = x^2e^{-x}$, **(5)** $f(x) = x^2\ln x$, **(6)** $f(x) = x^2\sin x$, **(7)** $f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1}$,

1.11.6. Рекуррентные формулы для вычисления старших производных в точке

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

1. Пусть $f(x) = e^{x^3}$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

2. Пусть $f(x) = \arcsin x$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

3. Пусть $f(x) = e^{x^2}$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

4. Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

2011-2012 Курс 1, семестр 1, семинар 06(m1-06)
Тема: Дифференциалы

1.12. Дифференциал

1.12.1. Вычисление первого дифференциала

С **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите первую производную и первый дифференциал функции **(1)** $f(x) = 2x - 5$, **(2)** $f(x) = x^2 - 6x + 5$, **(3)** **(4)** $f(x) = x^3$, **(5)** $f(x) = \ln x$, **(6)** $f(x) = xe^{-x}$, **(7)** $f(x) = \sin x$, **(8)** $f(x) = x \cos x$, **(9)** $f(x) = \sin(x^2)$, **(10)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, **(11)** $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$, **(12)** $f(x) = \ln(e^x)$.

Д **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Найдите первую производную и первый дифференциал функции **(1)** $f(x) = 3x - 2$, **(2)** $f(x) = x^3$, **(3)** $f(x) = \sqrt{x}$, **(4)** $f(x) = e^{-x}$, **(5)** $f(x) = \cos x$, **(6)** $f(x) = x \sin x$, **(7)** $f(x) = \cos(x^2)$, **(8)** $f(x) = \arcsin x$, **(9)** $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, **(10)** $f(x) = e^{\ln x}$.

1.12.2. Применение первого диффренуиала

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

1. Найдите **(a)** df, **(b)** $f(x) + df$, **(c)** $f(x + dx)$, сравните значения **(b)** и **(c)** с помощью калькулятора, если **(1)** $f(x) = 2x - 3$, $x = 3$, $dx = 2$, **(2)** $f(x) = x^3$, $x = 9$, $dx = 2$, **(3)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 100$, $dx = 21$, **(4)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$, $dx = 19$, **(5)** $f(x) = \sin x$, $x = \frac{\pi}{6}$, $dx = \frac{\pi}{6}$, **(6)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x = 0$, $dx = 1$, **(7)** $f(x) = \arcsin x$, $x = \frac{1}{2}$, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

2. Найдите **(a)** df, **(b)** $f(x) + df$, **(c)** $f(x + dx)$, сравните значения **(b)** и **(c)** с помощью калькулятора, если **(1)** $f(x) = 3x - 2$, $x = 5$, $dx = -3$, **(2)** $f(x) = x^2$, $x = 9$, $dx = 2$, **(3)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 4$, $dx = 5$, **(4)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 1$, $dx = 0{,}331$, **(5)** $f(x) = \cos x$, $x = 0$, $dx = \frac{\pi}{6}$, **(6)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x = 1$, $dx = \sqrt{3} - 1$, **(7)** $f(x) = \arcsin x$, $x = -\frac{1}{2}$, $dx = 1$.

1.12.3. Вычисление второго диффренуиала

С **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите вторую производную и второй дифференциал функции **(1)** $f(x) = 2x - 3$, **(2)** $f(x) = x^2 - 6x + 5$, **(3)** $f(x) = \ln x$, **(4)** $f(x) = xe^{-x}$, **(5)** $f(x) = \sin x$, **(6)** $f(x) = x \sin x$, **(7)** $f(x) = \sin(x^2)$, **(8)** $f(x) = \arcsin x$, **(9)** $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

Д **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Найдите вторую производную и второй дифференциал функции **(1)** $f(x) = 4x - 3$, **(2)** $f(x) = x^3$, **(3)** $f(x) = \sqrt{x}$, **(4)** $f(x) = e^{-x}$, **(5)** $f(x) = \cos x$, **(6)** $f(x) = x \cos x$, **(7)** $f(x) = \cos(x^2)$, **(8)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, **(9)** $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$.

1.12.4. Применение второго диффренуиала

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

1. Вычислите **(a)** df, **(b)** $d^2 f$, **(c)** $f(x) + df + \frac{1}{2} d^2 f$, **(d)** $f(x + dx)$, сравните значения **(c)** и **(d)** с помощью калькулятора, если **(1)** $f(x) = 2x + 3$, $x = 2$, $dx = 3$, **(2)** $f(x) = x^3$, $x = 1$, $dx = 1$, **(3)** $f(x) = \ln x$, $x = 1$, $dx = 1$, **(4)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 100$, $dx = 21$, **(5)** $f(x) = \sin x$, $x = 0$, $dx = 1$, **(6)** $f(x) = \arcsin x$, $x = 0$, $dx = \frac{1}{2}$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

2. Вычислите **(a)** df, **(b)** d^2f, **(c)** $f(x)+df+\frac{1}{2}d^2f$, **(d)** $f(x+dx)$, сравните значения **(c)** и **(d)** с помощью калькулятора, если **(1)** $f(x)=x$, $x=2$, $dx=3$, **(2)** $f(x)=x^2$, $x=1$, $dx=9$, **(3)** $f(x)=e^x$, $x=0$, $dx=1$, **(4)** $f(x)=\sqrt{x}$, $x=4$, $dx=5$, **(5)** $f(x)=\cos x$, $x=0$, $dx=1$, **(6)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $x=0$, $dx=1$.

1.12.5. Вычисление производных

С Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x)=x^3$, $n=2$, **(2)** $f(x)=x^3$, $n=3$, **(3)** $f(x)=\arcsin x$, $n=2$, **(4)** $f(x)=x\arcsin x$, $n=2$, $x=0$.

Д Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x)=x^4$, $n=3$, **(2)** $f(x)=x^4$, $n=4$, **(3)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $n=2$, **(4)** $f(x)=x\operatorname{arctg} x$, $n=2$, $x=0$.

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x)=x^m$, $m>n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(2)** $f(x)=e^{2x}$, **(3)** $f(x)=\cos x$, **(4)** $f(x)=\sin 3x$, **(5)** $f(x)=\frac{1}{x^2}$, **(6)** $f(x)=\ln x$,

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

4. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x)=x^m$, $m<n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(2)** $f(x)=x^m$, $m=n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(3)** $f(x)=e^{-3x}$, **(4)** $f(x)=\sin x$, **(5)** $f(x)=\frac{1}{x}$,

1.12.6. Вычисление и применение дифференциала n-го порядка

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите d^nf, если **(1)** $f(x)=x^n$, **(2)** $f(x)=\ln x$, **(3)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(4)** $f(x)=x^2e^x$, **(5)** $f(x)=\sin x$, $n=4k+2$, **(6)** $f(x)=x\cos x$, $n=4k+3$.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите d^nf, если **(1)** $f(x)=x^{n+1}$, **(2)** $f(x)=\frac{1}{x}$, **(3)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$, **(4)** $f(x)=x\ln x$, **(5)** $f(x)=x^2e^{-x}$, **(6)** $f(x)=\cos x$, $n=4k+3$, **(7)** $f(x)=x\sin x$, $n=4k+3$.

1.12.7. Асимптотические формулы (повторение темы)

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

1. Является ли верным утверждение: **(1)** $x+x^2=o(\sqrt[3]{x})$ при $x\to 0$, **(2)** $x+x^2=o(x^3)$ при $x\to+\infty$, **(3)** $x+x^2=o(1)$ при $x\to 0$, **(4)** $x\sin x=o(1)$ при $x\to 0$, **(5)** $x\sin x=o(x)$ при $x\to 0$, **(6)** $x\sin x=x^2+o(x^2)$ при $x\to 0$, **(7)** $x\sin x=x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^5)$ при $x\to 0$, **(8)** $\frac{2}{2-x}=1+o(1)$ при $x\to 0$, **(9)** $\frac{1}{1-2x}=1+2x+o(x)$ при $x\to 0$, **(10)** $\frac{x}{1-3x}=x+9x^2+o(x^2)$ при $x\to 0$,

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

2. Является ли верным утверждение: **(1)** $x+x^2=o(1)$ при $x\to 0$, **(2)** $x^2+x^3=o(x)$ при $x\to 0$, **(3)** $x+x^2=o(1)$ при $x\to+\infty$, **(4)** $x\sin\frac{1}{x}=o(1)$ при $x\to 0$, **(5)** $\sin(x^2)=o(x)$ при $x\to 0$, **(6)** $x\sin(x^2)=x^3+o(x^3)$ при $x\to 0$, **(7)** $x\sin x=x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^4)$ при $x\to 0$, **(8)** $\frac{4}{1-x}=4+o(1)$ при $x\to 0$, **(9)** $\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+o(x^3)$ при $x\to 0$, **(10)** $\frac{x}{1-4x}=x+4x^2+o(x^2)$ при $x\to 0$,

1.12.8. Асимптотические формулы для сложной функции (повторение темы)

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

1. Пусть $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2$. Найдите такие a_k, что $g(f(x))=\sum_{k=0}^{6}a_kx^k+o(x^6)$ при $x\to 0$.

2. Пусть $f(x) = x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $g(x) = x^2$. Найдите такие значения коэффициентов a_k, b_k, c_k, что
(a) $f(g(x)) = \sum_{k=0}^{6} a_k x^k + o(x^6)$, **(b)** $g(f(x)) = \sum_{k=0}^{4} b_k x^k + o(x^4)$, **(c)** $f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{5} c_k x^k + o(x^5)$ при $x \to 0$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

3. Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = x^3$. Найдите такие a_k что $g(f(x)) = \sum_{k=0}^{7} a_k x^k + o(x^7)$ при $x \to 0$.

4. Пусть $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$. Найдите такие значения коэффициентов a_k, b_k, c_k, что
(a) $f(g(x)) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k + o(x^4)$, **(b)** $g(f(x)) = \sum_{k=0}^{4} b_k x^k + o(x^4)$. при $x \to 0$.

2011-2012 Курс 1, семестр 1, семинар 07(m1-07)

Тема: Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях

1.13. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях

1.13.1. Формула Лагранжа

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Используя формулу конечных приращений, дайте оценку величины
$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)\in\left[(b-a)\inf_{(a;b)}f'(x);\ (b-a)\sup_{(a;b)}f'(x)\right]$, если
(1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $a=99$, $b=101$. **(2)** $f(x)=\sqrt{x}$, $a=16$, $b=25$. **(3)** $f(x)=\ln x$, $a=e^2$, $b=e^3$.
(4) $f(x)=\sin x$, $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{3}$. **(5)** $f(x)=\arcsin x$, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Используя формулу конечных приращений, дайте оценку величины
$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)\in\left[(b-a)\inf_{(a;b)}f'(x);\ (b-a)\sup_{(a;b)}f'(x)\right]$, если
(1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $a=\frac{10}{11}$, $b=\frac{10}{9}$. **(2)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $a=8$, $b=27$. **(3)** $f(x)=\ln x$, $a=10$, $b=12{,}5$.
(4) $f(x)=\cos x$, $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{3}$. **(5)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $a=9$, $b=10$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если
$f(x)=3x-x^3,\ a=-1,\ b=1.$

4. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если
$f(x)=\frac{e^2}{e^2-1}\ln x,\ a=e^3,\ b=e^5.$

5. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если
$f(x)=\ln(1+x^2),\ a=\frac{3}{4},\ b=\frac{3}{2}.$

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

6. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если
$f(x)=5x^3-3x^5,\ a=-1,\ b=1.$

7. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если
$f(x)=24\arcsin x,\ a=\frac{3}{5},\ b=\frac{4}{5}.$

8. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если
$f(x)=3x^2-x^3,\ a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}.$

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

9. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если
$f(x)=x^2(5-x)^3,\ a=0,\ b=5.$

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

10. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если
$f(x)=x^5(11-x)^6,\ a=0,\ b=11.$

1.13.2. Формула Коши

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

1. Используя обобщенную формулу конечных приращений (Коши),
$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\in\left[\inf_{(a;b)}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)};\ \sup_{(a;b)}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right]$, дайте оценку величины **(1)** $\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}$, $a=5$, $b=6$.
(2) $\frac{\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} a}{\ln(1+b^2)-\ln(1+a^2)}$, $a=10$, $b=11$. **(3)** $\frac{\ln b-\ln a}{b^2-a^2}$, $a=101$, $b=99$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

2. Используя обобщенную формулу конечных приращений (Коши), $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \left[\inf_{(a;b)} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}; \sup_{(a;b)} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right]$, дайте оценку величины **(1)** $\frac{b^4-a^4}{b^2-a^2}$, $a=5$, $b=6$. **(2)** $\frac{\ln b-\ln a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$, $a=9$, $b=16$. **(3)** $\frac{\ln b-\ln a}{\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} a}$, $a=\frac{3}{5}$, $b=\frac{4}{5}$.

1.13.3. Асимптотические формулы (повторение темы)

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

1. Является ли верным утверждение: **(1)** $(\ln x)^{-1} = o(x)$ при $x \to 0$, **(2)** $x^{-1} = o((\ln x)^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(3)** $\ln(1-x) = -x + o(1)$ при $x \to 0$, **(4)** $\ln(1-x) = -x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(5)** $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(6)** $\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x)$ при $x \to 0$, **(7)** $\ln(1+x) = x + o(x^2)$ при $x \to +\infty$,

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

2. Является ли верным утверждение: **(1)** $(\ln x)^{-1} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(2)** $\frac{1}{x\ln x} = o(\frac{1}{x})$ при $x \to +\infty$, **(3)** $\ln(1-x) = -x + o(x)$ при $x \to 0$, **(4)** $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(5)** $\ln(1+x) = 2x + 3x^2 + o(1)$ при $x \to 0$, **(6)** $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = o(1)$ при $x \to +\infty$,

1.13.4. Применение асимптотических формул для вычисления пределов

Соглашение об асимптотических формулах. При решении задач этого и всех последующих разделов можно использовать формулы

(1) $\sin x = x + o(x)$, $\sin x = x + o(x^2)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$,

(2) $\arcsin x = x + o(x^2)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$,

(3) $\cos x = 1 + o(x)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$,

(4) $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$,

(5) $\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$,

(6) $\frac{1}{1-x} = 1 + o(1)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$,

(7) $\frac{1}{1+x} = 1 + o(1)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$,

(8) $\sqrt{1+x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$,

(9) $\sqrt{1-x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$,

(10) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$,

(11) $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$,

(12) $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,

(13) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$,

(14) $e^x = 1 + x + o(x)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^{-x} = 1 - x + o(x)$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,

(15) $(1+x)^p = 1 + px + o(x)$, $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2)$, $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-1)}{6}x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

Эти формулы называются "асимптотическими формулами". Каждая из этих формул является также "формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано". Можно использовать формулы первого и второго замечательных пределов, $\frac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$,

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$ при $x \to 0$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e + o(1)$ при $x \to +\infty$, а также формулы $(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, $x^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$. Доказательство каждой из этих формул будет дано в соответствующем месте нашего курса.

С Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\sin 3x)}{\sin(3\sin 2x)}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{x}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}{\sin 3x+\sin 2x}$.

2. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-2\cos 2x+\cos x}{x^2}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 5x-5\sin 3x}{x^3}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 5x+5\sin 3x-\sin 30x}{x^3}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x+\sin x-\sin 2x}{x^3}$.

Д Простые задачи для самостоятельного решения.

3. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 5x}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 3x}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(12x^2)}{\operatorname{tg}(3x^2)}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin 2x}{x}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x}$,

4. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+\cos 4x-\cos x-\cos 3x}{x^2}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 2x+2\sin 3x-12x\cos x}{x^3}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x-\sin x-\sin 2x}{x^3}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

5. Используя асимптотические формулы, найдите $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+7x^2}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)$.

6. Найдите, используя асимптотические формулы, $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x)-3\arcsin x}{\operatorname{tg}(2x)-2\operatorname{tg} x}$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

7. Используя асимптотические формулы, найдите $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$

8. Найдите, используя асимптотические формулы, $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(3x)-3\operatorname{arctg} x}{\sin(2x)-2\sin x}$.

9. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

10. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\arcsin x-2x}{x^5}$,

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

11. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{arctg} x-2x}{x^5}$.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

12. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to e}\frac{e^x-x^e}{x-e}$, **(2)** $\lim_{x\to e}\frac{e^{2x}-x^{2e}}{(x-e)^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 1}\frac{e^{e^2x}-(ex)^{e^2}}{(x-1)^2}$. **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-e}{x^2}$.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

13. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to e}\frac{e-x}{e^x-x^e}$, **(2)** $\lim_{x\to 1}\frac{e^{ex}-(ex)^e}{(x-1)^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1-x}{x^2}$,

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

14. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде $f(x)=\sum_{k=0}^n C_k x^k + o(x^n)$ для $f(x)=\sin(\sin x)$ и $n=6$.

15. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде $f(x)=\sum_{k=0}^n C_k x^k + o(x^n)$ для $f(x)=\sin(2\operatorname{tg} x)$ и $n=6$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

16. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n)$ для $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$ и $n = 6$.

17. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n)$ для $f(x) = \operatorname{tg}(2\sin x)$ и $n = 6$.