

1. Анализ-1**1.1. Предел последовательности****1.1.1. Прямое вычисление предела последовательности****1.1.1.1. Предел последовательности. Прямое вычисление предела последовательности.**

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-781-781-121**Предел последовательности: Прямое вычисление предела последовательности**

1. Пусть $x_n = \frac{3n+2}{n+1}$ и $\epsilon > 0$. Найдите наименьшее $N : \forall n \geq N$ верно $|x_n - 3| < \epsilon$.
2. Укажите наименьшее значение $N : \forall n \geq N \Rightarrow \left| \frac{40n^2+7}{8n^2+3} - 5 \right| < 10^{-4}$.
3. Пусть $x_n = \sqrt[n]{2n}$. Укажите какое нибудь $N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n \in (1; 1,001)$.
4. Укажите какое-нибудь значение $N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n!} < 10^{-30}$.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-781-781-122**Предел последовательности: Прямое вычисление предела последовательности**

1. Пусть $x_n = \frac{2n+3}{n+1}$ и $\epsilon > 0$. Найдите наименьшее $N : \forall n \geq N$ верно $|x_n - 2| < \epsilon$.
2. Укажите наименьшее значение $N : \forall n \geq N \Rightarrow \left| \frac{42n^2+58}{7n^2+5} - 6 \right| < 10^{-4}$.
3. Пусть $x_n = \sqrt[n]{3n}$. Укажите какое нибудь $N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n \in (1; 1,0001)$.
4. Укажите какое-нибудь значение $N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{n^n}{n!} > 10^6$. Ответ должен быть обоснован.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-781-781-123**Предел последовательности: Прямое вычисление предела последовательности**

1. Пусть $x_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ и $\epsilon > 0$. Найдите наименьшее $N : \forall n \geq N$ верно $|x_n - 1| < \epsilon$.
2. Укажите наименьшее значение $N : \forall n \geq N \Rightarrow \left| \frac{24n^2+53}{8n^2+7} - 3 \right| < 10^{-4}$.
3. Пусть $x_n = n^{1/(2n)}$. Укажите какое нибудь $N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n \in (1; 1,0001)$.
4. Укажите какое-нибудь значение $N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{n!}{n^n} < 10^{-3}$. Ответ должен быть обоснован.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-781-781-124**Предел последовательности: Прямое вычисление предела последовательности**

1. Пусть $x_n = \frac{3n^4-1}{n^4+1}$ и $\epsilon > 0$. Найдите наименьшее $N : \forall n \geq N$ верно $|x_n - 3| < \epsilon$.
2. Укажите наименьшее значение $N : \forall n \geq N \Rightarrow \left| \frac{15n^2+67}{3n^2+8} - 5 \right| < 10^{-4}$.
3. Пусть $x_n = \sqrt[n]{4n}$. Укажите какое нибудь $N : \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n| < 10^{-2}$.
4. Укажите какое-нибудь значение $N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{5^n}{n!} < 10^{-4}$. Ответ должен быть обоснован.

1.1.2. Теоремы о пределе последовательности**1.1.2.1. Предел последовательности. Определение предела.**

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-131**Предел последовательности: Определение предела**

1. Что означает $x_n \rightarrow +\infty$? Запишите соответствующую логическую формулу.
2. Постройте отрицание: $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n \geq N, \exists m \geq N : |x_n - x_m| \geq \varepsilon$.
3. Пусть x_n и y_n – последовательности. Укажите все верные утверждения
 - (a) Если x_n сходится и y_n сходится, то $x_n + y_n$ сходится
 - (b) Если x_n расходится и y_n сходится, то $x_n + y_n$ расходится
 - (c) Если x_n расходится и y_n расходится, то $x_n + y_n$ расходится
 - (d) Если $x_n + y_n$ сходится и x_n расходится, то y_n расходится
 - (e) Если $x_n + y_n$ расходится и x_n сходится, то y_n расходится
 - (f) Если $x_n + y_n$ расходится и x_n расходится, то последовательность y_n может быть сходящейся и может быть расходящейся
4. Докажите, что фундаментальная последовательность является ограниченной.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-132**Предел последовательности: Определение предела**

1. Что означает $x_n \rightarrow -\infty$? Запишите соответствующую логическую формулу.
2. Постройте отрицание: $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N, \forall p \geq 1$ верно $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.
3. Пусть x_n – бесконечно большая положительная последовательность, т.е. $x_n \rightarrow +\infty$.
 - (a) Если y_n ограниченная, то $x_n \cdot y_n$ – ограниченная
 - (b) Если y_n ограниченная, то $x_n \cdot y_n$ – бесконечно большая
 - (c) Если y_n ограниченная, то $x_n + y_n$ – бесконечно большая
 - (d) Если y_n бесконечно большая отрицательная, т.е. $y_n \rightarrow -\infty$, то $x_n + y_n$ – бесконечно большая
 - (e) Если y_n бесконечно большая положительная, т.е. $y_n \rightarrow +\infty$, то x_n/y_n – ограниченная
 - (f) Если y_n бесконечно малая, то $x_n \cdot y_n$ – ограниченная
4. Докажите, что сходящаяся последовательность является ограниченной.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-133**Предел последовательности: Определение предела**

1. Что означает $x_n \rightarrow 0$? Запишите соответствующую логическую формулу.
2. Постройте отрицание: $\exists b : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N$ верно $|x_n - b| < \varepsilon$.
3. Пусть x_n и y_n – последовательности.
 - (a) Если $x_n - y_n$ сходится и x_n расходится, то y_n расходится
 - (b) Если $x_n - y_n$ расходится и x_n сходится, то y_n расходится
 - (c) Если $x_n - y_n$ расходится и x_n расходится, то последовательность y_n может быть сходящейся и может быть расходящейся
 - (d) Если x_n сходится и y_n сходится, то $x_n - y_n$ сходится
 - (e) Если x_n расходится и y_n сходится, то $x_n - y_n$ расходится
 - (f) Если x_n расходится и y_n расходится, то $x_n - y_n$ расходится
4. Докажите, что фундаментальная последовательность имеет единственную предельную точку.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-134**Предел последовательности: Определение предела**

1. Что означает $x_n \rightarrow 1$? Запишите соответствующую логическую формулу.
2. Постройте отрицание: $\forall b \exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n \geq N : |x_n - b| \geq \varepsilon$.
3. Пусть x_n – неограниченная последовательность.
 - (a) Если y_n ограниченная, то $x_n \cdot y_n$ – ограниченная
 - (b) Если y_n ограниченная, то $x_n \cdot y_n$ – неограниченная
 - (c) Если y_n ограниченная, то $x_n + y_n$ – неограниченная
 - (d) Если y_n бесконечно большая, то $x_n + y_n$ – неограниченная
 - (e) Если y_n неограниченная, то $x_n \cdot y_n$ – неограниченная
 - (f) Если y_n бесконечно малая, то $x_n \cdot y_n$ – ограниченная
4. Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.

1.1.3. Предел эталонной последовательности**1.1.3.1. Предел последовательности. Эталонные пределы.****Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-141****Предел последовательности: Эталонные пределы****1.** Докажите, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 n}{\sqrt[3]{n}} = 0$.**2.** Исследуйте свойства каждой из следующих последовательностей. **(I)** $x_n = n$.**(II)** $x_n = (-2)^n$. **(III)** $x_n = 2^n + (-2)^n$. **(IV)** $x_n = \sin \frac{\pi n}{2}$. **(V)** $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.**(VI)** $x_n = \frac{(-n)^2}{3^n}$.**(a)** Последовательность x_n является бесконечно большой (б.б.) положительной или б.б. отрицательной.**(b)** Последовательность x_n является б.б., но не является б.б. положительной или б.б. отрицательной.**(c)** Последовательность x_n является неограниченной, но не является б.б.**(d)** Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.**(e)** Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.**(f)** Последовательность x_n – бесконечно малая.**3.** Исследуйте свойства каждой из следующих последовательностей:**(I)** $x_n = \frac{1+n^2}{n^3}$ **(II)** $x_n = \sqrt[3]{n}$ **(III)** $x_n = \log_2(n)$ **(IV)** $x_n = 2^n + 2^{-n}$ **(V)** $x_n = \frac{1}{n^n}$ **(VI)** $x_n = \frac{1}{n!}$ **(a)** Последовательность x_n является бесконечно большой (б.б.) положительной или б.б. отрицательной.**(b)** Последовательность x_n является б.б., но не является б.б. положительной или б.б. отрицательной.**(c)** Последовательность x_n является неограниченной, но не является б.б.**(d)** Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.**(e)** Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.**(f)** Последовательность x_n – бесконечно малая.**4.** Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:**(I)** $x_n = \frac{2^n}{n^{2005}}$ **(II)** $x_n = \frac{\log_{2005} n}{n^{1,01}}$ **(III)** $x_n = \frac{n!}{n^n}$ **(IV)** $x_n = \frac{0,9^n}{n^{0,9}}$ **(V)** $x_n = \frac{n^n}{2^n}$ **(VI)** $x_n = \frac{(1,0001)^n}{\log_2 n}$, $n \geq 2$ **(a)** x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная.**(b)** x_n является б.б., но не является б.б. положительной. **(c)** x_n – неограниченная, но не является б.б.**(d)** x_n – ограниченная, но не имеет предела. **(e)** x_n сходится, но не является бесконечно малой.**(f)** x_n – бесконечно малая.**5.** Укажите все сходящиеся (т.е. имеющие конечный предел) последовательности:**(a)** $a_n = \frac{n+1}{n-1}$ **(b)** $a_n = 2^n$ **(c)** $a_n = n \cdot \sin \frac{(-1)^n}{n}$ **(d)** $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n}$ **(e)** $a_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ **(f)** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}}$ **6.** Укажите все сходящиеся последовательности из числа приведенных далее и найдитевеличину предела. **(a)** $a_n = n^{-1/n}$ **(b)** $a_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n \ln n}$ **(c)** $a_n = n^2 \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ **(d)** $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ **(e)** $a_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ **(f)** $a_n = \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}\right)^{n^2}$

Предел последовательности: Эталонные пределы

1. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_3 n}{\sqrt{n}} = 0$.

2. Исследуйте свойства каждой из следующих последовательностей. (I) $x_n = \frac{\cos n}{n}$.

(II) $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n \cdot (-1)^n}$. (III) $x_n = \ln(\ln n)$. (IV) $x_n = \sin n$. (V) $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

(VI) $x_n = [1 + (-1)^n] \cdot n$.

(a) Последовательность x_n является бесконечно большой (б.б.) положительной или б.б. отрицательной.

(b) Последовательность x_n является б.б., но не является б.б. положительной или б.б. отрицательной.

(c) Последовательность x_n является неограниченной, но не является б.б.

(d) Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.

(e) Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.

(f) Последовательность x_n – бесконечно малая.

3. Исследуйте свойства каждой из следующих последовательностей:

(I) $x_n = \frac{1+n^3}{n^2+3n+1}$ (II) $x_n = \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$ (III) $x_n = \log_{1/2}(n)$ (IV) $x_n = (-2)^{-n}$ (V) $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(VI) $x_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

(a) Последовательность x_n является бесконечно большой (б.б.) положительной или б.б. отрицательной.

(b) Последовательность x_n является б.б., но не является б.б. положительной или б.б. отрицательной.

(c) Последовательность x_n является неограниченной, но не является б.б.

(d) Последовательность x_n – ограниченная, но не является сходящейся.

(e) Последовательность x_n сходится, но не является бесконечно малой.

(f) Последовательность x_n – бесконечно малая.

4. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:

(I) $x_n = \frac{n!}{n^n}$ (II) $x_n = \frac{1,001^n}{n^7}$ (III) $x_n = \frac{n^{1,01}}{\log_3 n}$, $n \geq 2$ (IV) $x_n = \frac{n^n}{4^n}$ (V) $x_n = \frac{6^n}{n!}$

(VI) $x_n = \frac{\log_2 n}{2005^n}$

(a) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная.

(b) x_n является б.б., но не является б.б. положительной. (c) x_n – неограниченная, но не является б.б.

(d) x_n – ограниченная, но не имеет предела. (e) x_n сходится, но не является бесконечно малой.

(f) x_n – бесконечно малая.

5. Укажите все сходящиеся (т.е. имеющие конечный предел) последовательности:

(a) $a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}$ (b) $a_n = (-2)^n$ (c) $a_n = \frac{n}{\sin n}$ (d) $a_n = (1 + n)^n$ (e) $a_n = n \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

(f) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}$

6. Укажите все сходящиеся последовательности из числа приведенных далее и найдите

величину предела. (a) $a_n = \left(n^2\right)^{-1/n}$ (b) $a_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2 \ln n}$ (c) $a_n = n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

(d) $a_n = \left(\frac{n^2 + n}{n^2 - 1}\right)^n$ (e) $a_n = n \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ (f) $a_n = \left(\sqrt{n^4 + n} - \sqrt{n^4 - n}\right)^n$

1.1.4. Вычисление предела последовательности типа рациональной дроби**1.1.4.1. Предел последовательности. Вычисление предела последовательности.**

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-191**Предел последовательности: Вычисление предела последовательности**

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8n+5}{2n+1}$.
2. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2-7n+5}{3n^2-2n+1}$
3. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} (\sqrt{n+8} - \sqrt{n+3})$.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-192**Предел последовательности: Вычисление предела последовательности**

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n+8}{3n+4}$.
2. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2+2n-3}{2n^2+n-1}$
3. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n-1} (\sqrt{n+6} - \sqrt{n+5})$.

1.1.5. Предел тригонометрической последовательности**1.1.5.1. Предел последовательности. Первый замечательный предел.**

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-151
Предел последовательности: Первый замечательный предел

- Укажите все верные утверждения. Последовательность $a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ является
(a) бесконечно большой (b) бесконечно малой (c) ограниченной (d) неограниченной
(e) монотонной (f) сходящейся последовательностью
- Укажите все верные утверждения. Последовательность $a_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ является
(a) бесконечно большой (b) бесконечно малой (c) ограниченной (d) неограниченной
(e) монотонной (f) сходящейся последовательностью
- Укажите все верные утверждения. Последовательность $a_n = n \sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n}\right)$ является
(a) бесконечно большой (b) бесконечно малой (c) ограниченной (d) неограниченной
(e) монотонной (f) сходящейся последовательностью

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-152
Предел последовательности: Первый замечательный предел

- Укажите все верные утверждения. Последовательность $a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ является
(a) бесконечно большой (b) бесконечно малой (c) ограниченной (d) неограниченной
(e) монотонной (f) сходящейся последовательностью
- Укажите все верные утверждения. Последовательность $a_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ является
(a) бесконечно большой (b) бесконечно малой (c) ограниченной (d) неограниченной
(e) монотонной (f) сходящейся последовательностью
- Укажите все верные утверждения. Последовательность $a_n = n^2 \sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n^2}\right)$ является
(a) бесконечно большой (b) бесконечно малой (c) ограниченной (d) неограниченной
(e) монотонной (f) сходящейся последовательностью

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-153
Предел последовательности: Первый замечательный предел

- Укажите все верные утверждения. Последовательность $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ является
(a) бесконечно большой (b) бесконечно малой (c) ограниченной (d) неограниченной
(e) монотонной (f) сходящейся последовательностью
- Укажите все верные утверждения. Последовательность $a_n = n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ является
(a) бесконечно большой (b) бесконечно малой (c) ограниченной (d) неограниченной
(e) монотонной (f) сходящейся последовательностью
- Укажите все верные утверждения. Последовательность $a_n = n \sin\left(\pi n + \frac{1}{n}\right)$ является
(a) бесконечно большой (b) бесконечно малой (c) ограниченной (d) неограниченной
(e) монотонной (f) сходящейся последовательностью

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-154
Предел последовательности: Первый замечательный предел

- Укажите все верные утверждения. Последовательность $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$ является
(a) бесконечно большой (b) бесконечно малой (c) ограниченной (d) неограниченной
(e) монотонной (f) сходящейся последовательностью
- Укажите все верные утверждения. Последовательность $a_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ является
(a) бесконечно большой (b) бесконечно малой (c) ограниченной (d) неограниченной
(e) монотонной (f) сходящейся последовательностью
- Укажите все верные утверждения. Последовательность $a_n = n^2 \sin\left(\pi n + \frac{1}{n^2}\right)$ является
(a) бесконечно большой (b) бесконечно малой (c) ограниченной (d) неограниченной
(e) монотонной (f) сходящейся последовательностью

1.1.6. Бесконечно малые последовательности**1.1.6.1. Предел последовательности. Сравнение последовательностей.****Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-161****Предел последовательности: Сравнение последовательностей**1. Пусть $x_n = \frac{1}{n}$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o(1)$ (b) $x_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (c) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (d) $x_n = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ (e) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (f) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)$ 2. Пусть $x_n = \frac{\ln n}{n^2}$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$ (b) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (c) $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3\sqrt{n}}\right)$ (d) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (e) $x_n = o\left(\frac{1}{n^3 \cdot \ln n}\right)$ (f) $x_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ 3. Пусть $x_n = n^3$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o(n^2)$ (b) $x_n = o(2^n)$ (c) $x_n = o(n!)$ (d) $x_n = o(n^n)$ (e) $x_n = o(\ln n)$ (f) $x_n = o(1)$ **Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-162****Предел последовательности: Сравнение последовательностей**1. Пусть $x_n = \frac{1}{n^2}$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o(1)$ (b) $x_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (c) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (d) $x_n = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ (e) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (f) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)$ 2. Пусть $x_n = \frac{1}{n^2 \cdot \ln n}$, $n > 1$; $x_1 = 1$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$ (b) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (c) $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3\sqrt{n}}\right)$ (d) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (e) $x_n = o\left(\frac{1}{n^3 \cdot \ln n}\right)$ (f) $x_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ 3. Пусть $x_n = 3^n$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o(n^2)$ (b) $x_n = o(2^n)$ (c) $x_n = o(n!)$ (d) $x_n = o(n^n)$ (e) $x_n = o(\ln n)$ (f) $x_n = o(1)$ **Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-163****Предел последовательности: Сравнение последовательностей**1. Пусть $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o(1)$ (b) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (c) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (d) $x_n = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ (e) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (f) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)$ 2. Пусть $x_1 = 1$, $x_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$, $n > 1$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ (b) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (c) $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^2\sqrt{n}}\right)$ (d) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (e) $x_n = o\left(\frac{1}{n \cdot \ln n}\right)$ (f) $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$ 3. Пусть $x_n = \ln n$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o(n^2)$ (b) $x_n = o(2^n)$ (c) $x_n = o(n!)$ (d) $x_n = o(n^n)$ (e) $x_n = o(\ln n)$ (f) $x_n = o(1)$

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-164
Предел последовательности: Сравнение последовательностей

1. Пусть $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o(1)$ (b) $x_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
 (c) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (d) $x_n = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ (e) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (f) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)$
2. Пусть $x_n = \frac{\ln n}{n^3}$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$ (b) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$
 (c) $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3\sqrt{n}}\right)$ (d) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (e) $x_n = o\left(\frac{1}{n^3 \cdot \ln n}\right)$ (f) $x_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$
3. Пусть $x_n = n^n$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o(n^2)$ (b) $x_n = o(2^n)$
 (c) $x_n = o(n!)$ (d) $x_n = o(n^n)$ (e) $x_n = o(\ln n)$ (f) $x_n = o(1)$

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-165
Предел последовательности: Сравнение последовательностей

1. Пусть $x_n = \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o(1)$ (b) $x_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
 (c) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (d) $x_n = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ (e) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (f) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)$
2. Пусть $x_n = \frac{\ln n}{n^2}$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$ (b) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$
 (c) $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3\sqrt{n}}\right)$ (d) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (e) $x_n = o\left(\frac{1}{n^3 \cdot \ln n}\right)$ (f) $x_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$
3. Пусть $x_n = 1$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o(n^2)$ (b) $x_n = o(2^n)$
 (c) $x_n = o(n!)$ (d) $x_n = o(n^n)$ (e) $x_n = o(\ln n)$ (f) $x_n = o(1)$

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-166
Предел последовательности: Сравнение последовательностей

1. Пусть $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o(1)$ (b) $x_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
 (c) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (d) $x_n = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ (e) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (f) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)$
2. Пусть $x_n = \frac{1}{n^2}$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$ (b) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$
 (c) $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3\sqrt{n}}\right)$ (d) $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (e) $x_n = o\left(\frac{1}{n^3 \cdot \ln n}\right)$ (f) $x_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$
3. Пусть $x_n = n!$. Укажите все верные утверждения: (a) $x_n = o(n^2)$ (b) $x_n = o(2^n)$
 (c) $x_n = o(n!)$ (d) $x_n = o(n^n)$ (e) $x_n = o(\ln n)$ (f) $x_n = o(1)$

1.1.7. Вычисление предела последовательности–3**1.1.7.1. Предел последовательности. Вычисление предела последовательности.**

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-171**Предел последовательности: Вычисление предела последовательности**

1. Вычислите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)} \right)$.
2. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} (\sqrt{n+8} - \sqrt{n+3})$.
3. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+7} \right)^n$.
4. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n}$.
5. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\cos \frac{1}{n} - 2 \cos \frac{2}{n} + \cos \frac{3}{n} \right)$.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-172**Предел последовательности: Вычисление предела последовательности**

1. Вычислите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)} \right)$.
2. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n-1} (\sqrt{n+6} - \sqrt{n+5})$.
3. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+7}{3n+3} \right)^n$.
4. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n)^{1/n}$.
5. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\sin \frac{1}{n} - 2 \sin \frac{2}{n} + \sin \frac{3}{n} \right)$.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-173**Предел последовательности: Вычисление предела последовательности**

1. Вычислите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} \right)$.
2. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} (\sqrt{n+9} - \sqrt{n+3})$.
3. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n$.
4. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2/n}$.
5. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\operatorname{tg} \frac{1}{n} - 2 \operatorname{tg} \frac{2}{n} + \operatorname{tg} \frac{3}{n} \right)$.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-174**Предел последовательности: Вычисление предела последовательности**

1. Вычислите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \right)$.
2. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+3})$.
3. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^n$.
4. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3)^{1/n}$.
5. Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(e^{\frac{1}{n}} - 2e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} \right)$.

1.1.8. Предельные точки последовательности**1.1.8.1. Предел последовательности. Предельные точки.****Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики К1 S1 W6-1208-10-21****Предел последовательности: Предельные точки**

1. Сформулируйте определение предельной точки последовательности, которое использует понятие подпоследовательности.

2. Укажите множество всех предельных точек последовательности

$$x_n = n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n}\right) \quad (\text{включая бесконечно удаленные})$$

(a) $\{-\infty; +\infty; 0\}$. (b) $\{0\}$. (c) $\left\{-\infty; +\infty; -1; +1; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. (d) $\{-\infty; +\infty; -1; +1\}$.
(e) $\{-1; +1\}$. (f) $\{-\infty; +\infty; -1; +1; 0\}$.

3. Сформулируйте определение верхнего предела числовой последовательности.

4. Приведите примеры последовательностей, у которых имеется

1 единственная предельная точка – вещественное число

2 ровно две предельных точки, и обе – вещественные числа

3 счетное число предельных точек

4 несчетное число предельных точек

5 ровно одна предельная точка – вещественное число и предельная точка $+\infty$

6 все предельные точки которых образуют множество $[0; 1]$

5. Опишите все возможные варианты расположения предельных точек ограниченной последовательности x_k , для которой подпоследовательность x_{2k} является возрастающей, а подпоследовательность x_{2k+1} является убывающей. Приведите примеры.

6. Докажите, что если $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$, то последовательность y_n , полученная из x_n произвольной перестановкой членов, сходится и $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$.

7. Приведите пример последовательности $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, члены которой можно переставить так, что последовательность с переставленными членами этим свойством не обладает, т.е. $y_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$

Предел последовательности: Предельные точки

1. Сформулируйте определение предельной точки последовательности, которое использует понятие окрестности.

2. Укажите множество всех предельных точек последовательности

$$x_n = n \cdot \sin\left(\pi n + \frac{1}{n}\right) \text{ (включая бесконечно удаленные)}$$

(a) $\{-\infty; +\infty; 0\}$. (b) $\{0\}$. (c) $\left\{-\infty; +\infty; -1; +1; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. (d) $\{-\infty; +\infty; -1; +1\}$.
(e) $\{-1; +1\}$. (f) $\{-\infty; +\infty; -1; +1; 0\}$.

3. Сформулируйте определение верхнего предела числовой последовательности.

4. Приведите примеры последовательностей, у которых имеется

1 единственная предельная точка – вещественное число

2 ровно две предельных точки, и обе – вещественные числа

3 счетное число предельных точек

4 несчетное число предельных точек

5 ровно одна предельная точка – вещественное число и предельная точка $+\infty$

6 все предельные точки которых образуют множество $[0; 1]$

5. Опишите все возможные варианты расположения предельных точек ограниченной последовательности x_k , для которой подпоследовательность x_{2k} является убывающей, а подпоследовательность x_{2k+1} является возрастающей. Приведите примеры. Ответ обоснуйте.

6. Докажите, что если x_n – бесконечно большая положительная последовательность, т.е. $x_n \rightarrow +\infty$, то последовательность y_n , полученная из x_n произвольной перестановкой членов, также бесконечно большая положительная последовательность, т.е. $y_n \rightarrow +\infty$.

7. Приведите пример последовательности $x_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, члены которой можно переставить так, что последовательность с переставленными членами $y_n \neq O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Предел последовательности: Предельные точки

1. Сформулируйте отрицание к определению "Число b называется предельной точкой последовательности", используя понятие подпоследовательности.

2. Укажите множество всех предельных точек последовательности

$$x_n = n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{1}{n}\right) \text{ (включая бесконечно удаленные)}$$

(a) $\{-\infty; +\infty; 0\}$. (b) $\{0\}$. (c) $\left\{-\infty; +\infty; -1; +1; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. (d) $\{-\infty; +\infty; -1; +1\}$.

(e) $\{-1; +1\}$. (f) $\{-\infty; +\infty; -1; +1; 0\}$.

3. Сформулируйте определение верхнего предела числовой последовательности.

4. Приведите примеры последовательностей, у которых имеется

1 единственная предельная точка – вещественное число

2 ровно две предельных точки, и обе – вещественные числа

3 счетное число предельных точек

4 несчетное число предельных точек

5 ровно одна предельная точка – вещественное число и предельная точка $+\infty$

6 все предельные точки которых образуют множество $[0; 1]$

5. Опишите все возможные варианты расположения предельных точек ограниченной последовательности x_k , для которой подпоследовательности x_{3k} и x_{3k+1} являются возрастающими, а подпоследовательность x_{3k+2} является убывающей. Приведите примеры. Ответ обоснуйте.

6. Докажите, что если x_n – бесконечно большая отрицательная последовательность, т.е. $x_n \rightarrow -\infty$, то последовательность y_n , полученная из x_n произвольной перестановкой членов, также бесконечно большая отрицательная последовательность, т.е. $y_n \rightarrow -\infty$.

7. Приведите пример последовательности $x_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, члены которой можно переставить так, что последовательность с переставленными членами $y_n \neq O\left(\frac{1}{n}\right)$

Предел последовательности: Предельные точки

1. Сформулируйте отрицание к определению "Число b называется предельной точкой последовательности", используя понятие окрестности.

2. Укажите множество всех предельных точек последовательности

$$x_n = n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n^2}\right) \text{ (включая бесконечно удаленные)}$$

(a) $\{-\infty; +\infty; 0\}$. (b) $\{0\}$. (c) $\left\{-\infty; +\infty; -1; +1; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. (d) $\{-\infty; +\infty; -1; +1\}$.
(e) $\{-1; +1\}$. (f) $\{-\infty; +\infty; -1; +1; 0\}$.

3. Сформулируйте определение верхнего предела числовой последовательности.

4. Приведите примеры последовательностей, у которых имеется

1 единственная предельная точка – вещественное число

2 ровно две предельных точки, и обе – вещественные числа

3 счетное число предельных точек

4 несчетное число предельных точек

5 ровно одна предельная точка – вещественное число и предельная точка $+\infty$

6 все предельные точки которых образуют множество $[0; 1]$

5. Опишите все возможные варианты расположения предельных точек ограниченной последовательности x_k , для которой подпоследовательности x_{3k} и x_{3k+1} являются убывающими, а подпоследовательность x_{3k+2} является возрастающей. Приведите примеры. Ответ обоснуйте.

6. Докажите, что если последовательность x_n не является сходящейся, т.е. $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, то последовательность y_n , полученная из x_n произвольной перестановкой членов, также не является сходящейся

7. Приведите пример последовательности $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, члены которой можно переставить так, что последовательность с переставленными членами $y_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$