1.2.2. Предел функции, теоретические вопросы

1.2.2.1. Предел функции. Теоретические вопросы.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–702-15-21

Предел функции: Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение "Число b является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$".

2. Сформулируйте определение "Функция $f(x)$ не имеет предела при $x \to a$".

3. Докажите, что если функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки a, $g(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, то $f(x) \cdot g(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$.

4. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$.

5. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$, то $\nexists \lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$.

6. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Докажите, что $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–702-15-22

Предел функции: Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$".

2. Сформулируйте определение "Число b не является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$".

3. Докажите, что если функция $f(x)$ определена и ограничена на множестве $\mathcal{X} = [a;\ +\infty)$, $g(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, то $f(x) \cdot g(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.

4. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$, $\exists \lim_{x\to a} g(x) = B$, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = A - B$.

5. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$.

6. Пусть $f(x) = \cos\frac{1}{x}$. Докажите, что $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–702-15-23

Предел функции: Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение "Функция $f(x)$ не имеет предела при $x \to a$".

2. Сформулируйте определение "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$".

3. Докажите, что если $f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$ и $b \neq 0$, то $\frac{1}{b+f(x)}$ – ограниченная функция в окрестности точки $x = a$.

4. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$, $\exists \lim_{x\to a} g(x) = B$, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = A \cdot B$.

5. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ и $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$, то $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$.

6. Пусть $f(x) = \sin x$. Докажите, что $\nexists \lim_{x\to +\infty} f(x)$

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–702-15-24

Предел функции: Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение "Число b не является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$".

2. Сформулируйте определение "Число b является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$".

3. Докажите, что если $g(x)$ и $f(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$, то $f(x) + g(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$.

4. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$, $\exists \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, то $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

5. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$, то $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$.

6. Пусть $f(x) = \cos x$. Докажите, что $\nexists \lim_{x\to +\infty} f(x)$

1.2.3. Бесконечно малые функции, символ $o(\ldots)$

1.2.3.1. Бесконечно малые функции. Символ $o(\ldots)$.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–701-321

Бесконечно малые функции: Символ $o(\ldots)$

1. Что означает равенство $f(x)=o(1)$ при $x\to 0$?

2. Что означает равенство $o(1)\cdot o(1)=o(1)$ при $x\to 0$?

3. Докажите, что $o(x^2)\cdot o(x^3)=o(x^5)$ при $x\to 0$.

4. Укажите все значения γ, при которых $x^3=o(x^\gamma)$ при $x\to +0$.

5. Укажите все значения γ, при которых $o(x^{-3})=o(x^\gamma)$ при $x\to +\infty$.

6. Докажите **(1)** $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+o(x)$, **(2)** $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$, $x\to 0$.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–701-322

Бесконечно малые функции: Символ $o(\ldots)$

1. Что означает равенство $f(x)=o(x)$ при $x\to 0$?

2. Что означает равенство $o(1)+o(1)=o(1)$ при $x\to 0$?

3. Докажите, что $o(\sqrt{x})\cdot o(\sqrt[3]{x})=o(\sqrt[6]{x^5})$ при $x\to +0$.

4. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma=o(x^2)$ при $x\to +0$.

5. Укажите все значения γ, при которых $o(x^\gamma)=o(x^{-4})$ при $x\to +\infty$.

6. Докажите **(1)** $\frac{1}{1-x}=1+x+o(x)$, **(2)** $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+o(x^2)$, $x\to 0$.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–701-323

Бесконечно малые функции: Символ $o(\ldots)$

1. Что означает равенство $f(x)=o(1)$ при $x\to +\infty$?

2. Что означает равенство $o(1)\cdot o(1)=o(1)$ при $x\to +\infty$?

3. Докажите, что $o(x^4)\cdot o(x^3)=o(x^7)$ при $x\to 0$.

4. Укажите все значения γ, при которых $x^2=o(x^\gamma)$ при $x\to +0$.

5. Укажите все значения γ, при которых $o(x^{-1})=o(x^\gamma)$ при $x\to +\infty$.

6. Докажите **(1)** $\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}+o(x)$, **(2)** $\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$, $x\to 0$.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–701-324

Бесконечно малые функции: Символ $o(\ldots)$

1. Что означает равенство $f(x)=o(x)$ при $x\to +\infty$?

2. Что означает равенство $o(1)+o(1)=o(1)$ при $x\to +\infty$?

3. Докажите, что $o(x^5)\cdot o(x^4)=o(x^9)$ при $x\to 0$.

4. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma=o(x)$ при $x\to +0$.

5. Укажите все значения γ, при которых $o(x^\gamma)=o(x^{-1})$ при $x\to +\infty$.

6. Докажите **(1)** $\frac{1}{1+x}=1-x+o(x)$, **(2)** $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+o(x^2)$, $x\to 0$.

1.2.4. Предел функции. Сравнение бесконечно малых

1.2.4.1. Предел функции. Сравнение бесконечно малых.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–1208-531

Предел функции: Сравнение бесконечно малых

1. Если $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, то $f(x)$ называют функцией, малой по сравнению с $g(x)$ при $x\to+\infty$, и пишут $f(x)=o\big(g(x)\big)$ при $x\to+\infty$. Расположите указанные далее функции в таком порядке, чтобы $f_1(x)=o(f_2(x))$, $f_2(x)=o(f_3(x))$, $f_3(x)=o(f_4(x))$ и т.д.

(a) $\log_2 x$, **(b)** $\log_x 2$, **(c)** 2^x, **(d)** 2^{-x}, **(e)** x^5, **(f)** x^{-3}, **(g)** x^{-x}, **(h)** 1

2. Укажите все значения γ, при которых $x^5+x^\gamma=o(x^2)$ при $x\to+0$.

3. Укажите все значения γ, при которых $o(x^3)+o(x^5)=o(x^\gamma)$ при $x\to+0$.

4. Пусть $\alpha<\beta<0$. Укажите все значения γ, при которых $o(x^\alpha)+o(x^\beta)=o(x^\gamma)$ при $x\to+\infty$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–1208-532

Предел функции: Сравнение бесконечно малых

1. Если $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, то $f(x)$ называют функцией, малой по сравнению с $g(x)$ при $x\to+\infty$, и пишут $f(x)=o\big(g(x)\big)$ при $x\to+\infty$. Расположите указанные далее функции в таком порядке, чтобы $f_1(x)=o(f_2(x))$, $f_2(x)=o(f_3(x))$, $f_3(x)=o(f_4(x))$ и т.д.

(a) 3^{-x}, **(b)** 3^x, **(c)** $\log_{0,5} x$, **(d)** $\log_x \frac{1}{2}$, **(e)** x^x, **(f)** $\sqrt[3]{x}$, **(g)** $\sqrt[5]{x}$, **(h)** 1

2. Укажите все значения γ, при которых $x^4+x^\gamma=o(x^3)$ при $x\to+0$.

3. Укажите все значения γ, при которых $o(x^{-3})+o(x^{-5})=o(x^\gamma)$ при $x\to+\infty$.

4. Пусть $\alpha>\beta>0$. Укажите все значенияγ, при которых $o(x^\alpha)+o(x^\beta)=o(x^\gamma)$ при $x\to+0$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–1208-533

Предел функции: Сравнение бесконечно малых

1. Если $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, то $f(x)$ называют функцией, малой по сравнению с $g(x)$ при $x\to+\infty$, и пишут $f(x)=o\big(g(x)\big)$ при $x\to+\infty$. Расположите указанные далее функции в таком порядке, чтобы $f_1(x)=o(f_2(x))$, $f_2(x)=o(f_3(x))$, $f_3(x)=o(f_4(x))$ и т.д.

(a) $x^{-0,5}$, **(b)** $x^{0,3}$, **(c)** x^{-x}, **(d)** $\log_{0,5} x$, **(e)** $\log_x 0,5$, **(f)** 1, **(g)** $(0,5)^x$, **(h)** $(0,5)^{-x}$

2. Укажите все значения γ, при которых $x^3+x^\gamma=o(x^2)$ при $x\to+0$.

3. Укажите все значения γ, при которых $o(x^4)+o(x^7)=o(x^\gamma)$ при $x\to+0$.

4. Укажите все значения γ, при которых $o(x^{-3})+o(x^{-5})=o(x^\gamma)$ при $x\to+\infty$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–1208-534

Предел функции: Сравнение бесконечно малых

1. Если $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, то $f(x)$ называют функцией, малой по сравнению с $g(x)$ при $x\to+\infty$, и пишут $f(x)=o\big(g(x)\big)$ при $x\to+\infty$. Расположите указанные далее функции в таком порядке, чтобы $f_1(x)=o(f_2(x))$, $f_2(x)=o(f_3(x))$, $f_3(x)=o(f_4(x))$ и т.д.

(a) 1, **(b)** $(0,1)^x$, **(c)** $(0,1)^{-x}$, **(d)** $\big(x^5\big)^{-1}$, **(e)** $\big(x^{-3}\big)^{-1}$, **(f)** $\big(\log_3 x\big)^{-1}$, **(g)** $\big(\log_x 3\big)^{-1}$, **(h)** $(1/x)^{1/x}$

2. Укажите все значения γ, при которых $x^5+x^\gamma=o(x^4)$ при $x\to+0$.

3. Укажите все значения γ, при которых $o(x^{-2})+o(x^{-4})=o(x^\gamma)$ при $x\to+\infty$.

4. Укажите все значения γ, при которых $o(x^3)+o(x^5)=o(x^\gamma)$ при $x\to+0$.

1.2.5. Прямое вычисление предела элементарных функций

1.2.5.1. Предел функции. Прямое вычисление предела элементарных функций.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–1208-14-21

Предел функции: Прямое вычисление предела элементарных функций

1. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x)=2x+1,\ a=3,\ b=7,\ \epsilon=0,01$. Ответ должен быть обоснован.

2. Укажите какое нибудь значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x)=x^3,\ a=3,\ b=27,\ \epsilon=0,01$. Ответ должен быть обоснован.

3. Укажите наибольшее значение числа δ, при котором $\forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\epsilon$ для следующих функции и параметров: $f(x)=\sqrt[3]{x},\ a=27,\ b=3,\ \epsilon=1$.

4. Укажите наибольшее $\delta: \forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$, если
$f(x)=5^x,\ a=2,\ b=f(a),\ \varepsilon=100$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–1208-14-22

Предел функции: Прямое вычисление предела элементарных функций

1. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x)=3x-2,\ a=3,\ b=7,\ \epsilon=0,01$. Ответ должен быть обоснован.

2. Укажите какое нибудь значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x)=x^4,\ a=3,\ b=81,\ \epsilon=1$. Ответ должен быть обоснован.

3. Укажите наибольшее значение числа δ, при котором $\forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\epsilon$ для следующих функции и параметров: $f(x)=\sqrt[3]{x},\ a=64,\ b=4,\ \epsilon=1$.

4. Укажите наибольшее $\delta: \forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$, если
$f(x)=\log_3 x,\ a=81,\ b=f(a),\ \varepsilon=1$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–1208-14-23

Предел функции: Прямое вычисление предела элементарных функций

1. Укажите какое нибудь значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x)=x^5,\ a=3,\ b=243,\ \epsilon=100$. Ответ должен быть обоснован.

2. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x)=\sqrt[5]{x},\ a=32,\ b=2,\ \epsilon=10^{-2}$.

3. Укажите наибольшее $\delta: \forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$, если
$f(x)=x^3,\ a=3,\ b=f(a),\ \varepsilon=37$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–1208-14-24

Предел функции: Прямое вычисление предела элементарных функций

1. Укажите какое нибудь значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x)=x^3,\ a=4,\ b=64,\ \epsilon=10$. Ответ должен быть обоснован.

2. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x)=\sqrt[4]{x},\ a=81,\ b=3,\ \epsilon=10^{-2}$. Представьте полученное значение в виде десятичной дроби, не пользуясь калькулятором, с абсолютной погрешностью не больше $\Delta=0.01$

3. Укажите наибольшее $\delta: \forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$, если
$f(x)=\sqrt[3]{x},\ a=64,\ b=f(a),\ \varepsilon=1$.

1.2.6. Предел функции, вычисление пределов-1 (Рациональные и иррациональные)

1.2.6.1. Предел функции. Вычисление пределов-1 (Рациональные и иррациональные).

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–703-421

Предел функции: Вычисление пределов-1 (Рациональные и иррациональные)

1. Найдите $\lim_{x\to 6}\frac{x-5}{x-7}$. **2.** Найдите $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}$. **3.** Найдите $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$. **4.** Найдите $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. **5.** Найдите $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$. **6.** Найдите $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}$. **7.** Найдите $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-1}}{x-1}$. **8.** Найдите $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$. **9.** Найдите $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-1})$. **10.** Вычислите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–703-422

Предел функции: Вычисление пределов-1 (Рациональные и иррациональные)

1. Найдите $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-17}{x^2-24}$. **2.** Найдите $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-10x+16}{x^2-6x+8}$. **3.** Найдите $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. **4.** Найдите $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}$. **5.** Найдите $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}$. **6.** Найдите $\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{3x+4}-5}$. **7.** Найдите $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}}{x-1}$. **8.** Найдите $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1})$. **9.** Найдите $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})$. **10.** Вычислите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–703-421

Предел функции: Вычисление пределов-1 (Рациональные и иррациональные)

1. Найдите $\lim_{x\to 6}\frac{x-5}{x-7}$. **2.** Найдите $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}$. **3.** Найдите $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$. **4.** Найдите $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. **5.** Найдите $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$. **6.** Найдите $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}$. **7.** Найдите $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-1}}{x-1}$. **8.** Найдите $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$. **9.** Найдите $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-1})$. **10.** Вычислите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–703-422

Предел функции: Вычисление пределов-1 (Рациональные и иррациональные)

1. Найдите $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-17}{x^2-24}$. **2.** Найдите $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-10x+16}{x^2-6x+8}$. **3.** Найдите $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. **4.** Найдите $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}$. **5.** Найдите $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}$. **6.** Найдите $\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{3x+4}-5}$. **7.** Найдите $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}}{x-1}$. **8.** Найдите $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1})$. **9.** Найдите $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})$. **10.** Вычислите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$.

1.2.7. Предел функции, первый и второй замечательные пределы

1.2.7.1. Предел функции. Первый и второй замечательные пределы.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–704-431

Предел функции: Первый и второй замечательные пределы

1. Найдите $\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}$. **2.** Найдите $\lim_{x\to0}\frac{\sin(18x)\cdot\sin(24x)}{\sin^2(12x)}$. **3.** Найдите $\lim_{x\to+0}\bigl(1+x/5\bigr)^{3/x}$.

4. Найдите $\lim_{x\to+\infty}\bigl(1-3/x\bigr)^{x/2}$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–704-432

Предел функции: Первый и второй замечательные пределы

1. Найдите $\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}$. **2.** Найдите $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(6x)\cdot\sin(8x)}{\sin^3(3x)}$. **3.** Найдите $\lim_{x\to+0}\bigl(1+2x\bigr)^{1/3x}$.

4. Найдите $\lim_{x\to+\infty}\bigl(1-4/x\bigr)^{x/3}$

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–704-433

Предел функции: Первый и второй замечательные пределы

1. Найдите $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{x}$. **2.** Найдите $\lim_{x\to0}\frac{\sin(18x)\sin(12x)}{\sin^2(3x)}$. **3.** Найдите $\lim_{x\to0}\left(\frac{6+2x}{6+5x}\right)^{\frac{12}{x}}$. **4.** Найдите $\lim_{x\to+\infty}\bigl(1+3/x\bigr)^{x/2}$

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–704-434

Предел функции: Первый и второй замечательные пределы

1. Найдите $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. **2.** Найдите $\lim_{x\to0}\frac{\sin(12x)\sin(9x)}{\sin^2(6x)}$. **3.** Найдите $\lim_{x\to0}\left(\frac{7+6x}{7+4x}\right)^{\frac{6}{x}}$.

4. Найдите $\lim_{x\to+\infty}\bigl(1+18/x\bigr)^{x/6}$.

1.2.8. Непрерывные функции, классификация точек разрыва–1

1.2.8.1. Непрерывные функции. Классификация точек разрыва.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–714-471

Непрерывные функции: Классификация точек разрыва

1. Классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)}$. **2.** Классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$. **3.** Классифицируйте точки разрыва, $f(x)=\frac{x-1}{x(x^2-1)}\cdot e^{1/x}$. **4.** Классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\operatorname{tg}x\cdot\cos x$. **5.** Пусть $f(x)=\frac{|x|}{x(x-1)}$. Найдите $\lim_{x\to-0}f(x)$, $\lim_{x\to+0}f(x)$. Существует ли $\lim_{x\to0}f(x)$? **6.** Пусть $f(x)=x+2x^2,\ g(x)=2x-x^2$. Докажите, что $\exists p,\ q: f(g(x))=px+qx^2+o(x^2)$ при $x\to0$. Найдите значения коэффициентов $p,\ q$. **7.** Пусть $f(x)=2x+x^3$ и в окрестности точки $x=0$ определена обратная функция $g(x)$, $g\big(f(x)\big)=x$, и $g(x)=ax+bx^2+cx^3+o(x^4)$ при $x\to0$. Найдите значения коэффициентов.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–714-472

Непрерывные функции: Классификация точек разрыва

1. Классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\frac{x(x-3)}{(x-1)(x-3)}$. **2.** Классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\frac{x}{\sin x}$ **3.** Классифицируйте точки разрыва, $f(x)=\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}\cdot e^{-1/x}$. **4.** Классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\operatorname{ctg}x\cdot\sin x$. **5.** Пусть $f(x)=\frac{x^2-x}{|x|}$. Найдите односторонние пределы $\lim_{x\to-0}f(x)$, $\lim_{x\to+0}f(x)$. Существует ли $\lim_{x\to0}f(x)$? **6.** Пусть $f(x)=x+2x^2,\ g(x)=2x-x^2$. Докажите, что $\exists p,\ q: g(f(x))=px+qx^2+o(x^2)$ при $x\to0$. Найдите значения коэффициентов $p,\ q$. **7.** Пусть $f(x)=5x-2x^4$ и в окрестности точки $x=0$ определена обратная функция $g(x)$, $g\big(f(x)\big)=x$, и $g(x)=ax+bx^2+cx^3+dx^4+o(x^4)$ при $x\to0$. Найдите значения коэффициентов.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–714-473

Непрерывные функции: Классификация точек разрыва

1. Классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\frac{\operatorname{tg}x}{x}$. **2.** Классифицируйте точки разрыва, $f(x)=\frac{x}{x^2-2x}\cdot e^{-1/(x-1)}$. **3.** Классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x$. **4.** Пусть $f(x)=\frac{x^2-|x|}{x}$. Найдите односторонние пределы $\lim_{x\to-0}f(x)$, $\lim_{x\to+0}f(x)$. Существует ли $\lim_{x\to0}f(x)$? **5.** Пусть $f(x)=3x-x^2+o(x^2),\ g(x)=x+x^2+o(x^2)$ при $x\to0$, $f(0)=0,\ g(0)=0$. Докажите, что $\exists p,\ q: g(f(x))=px+qx^2+o(x^2)$ при $x\to0$. Найдите значения коэффициентов $p,\ q$. **6.** Пусть $f(x)=2x+3x^5+o(x^5)$ и в окрестности точки $x=0$ определена обратная функция $g(x)$, $g\big(f(x)\big)=x$, и $g(x)=mx+nx^2+kx^3+px^4+qx^5+o(x^5)$ при $x\to0$. Найдите значения коэффициентов.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–714-474

Непрерывные функции: Классификация точек разрыва

1. Классифицируйте все точки разрыва функции $f(x)=\frac{x}{\operatorname{tg}x}$ **2.** Классифицируйте точки разрыва, $f(x)=\frac{x}{x(x+2)}\cdot e^{x/(x-1)}$. **3.** Классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}$. **4.** Пусть $f(x)=\frac{x}{|x|}$. Найдите $\lim_{x\to-0}f(x)$, $\lim_{x\to+0}f(x)$ Существует ли $\lim_{x\to0}f(x)$?. **5.** Пусть $f(x)=2x-x^2+o(x^2),\ g(x)=x-x^2+o(x^2)$ при $x\to0,\ f(0)=0,\ g(0)=0$. Докажите, что $\exists p,\ q: g(f(x))=px+qx^2+o(x^2)$ при $x\to0$. Найдите значения коэффициентов $p,\ q$. **6.** Пусть $f(x)=\frac{x}{3}-4x^6+o(x^6)$ и в окрестности точки $x=0$ определена обратная функция $g(x)$, $g\big(f(x)\big)=x$, и $g(x)=px+qx^2+mx^3+nx^4+kx^5+sx^6+o(x^6)$ при $x\to0$. Найдите значения коэффициентов.

1.2.9. Непрерывные функции, классификация точек разрыва–2

1.2.9.1. Непрерывные функции. Классификация точек разрыва.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–715-7431

Непрерывные функции: Классификация точек разрыва

1. Укажите и классифицируйте все точки разрыва функции $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$.

2. Укажите и классифицируйте все точки разрыва функции $f(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$.

3. Классифицируйте точки разрыва функции $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$.

4. Укажите все точки разрыва функции $y = \frac{\ln(1+x)}{x}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

5. Классифицируйте все точки разрыва функции $y = \frac{x^2-x}{|x|}$.

6. Докажите, что точка $x = 0$ для функции $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x = 0, \\ \sin\frac{1}{x} & \text{при } x > 0, \end{cases}$ является точкой разрыва.

Классифицируйте.

7. Укажите все точки разрыва функции $y = \frac{\ln(x^4-2x^2+1)}{(e^{x^2-2}-1)(x-1)}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–715-7432

Непрерывные функции: Классификация точек разрыва

1. Укажите и классифицируйте все точки разрыва функции $f(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$.

2. Укажите и классифицируйте все точки разрыва функции $f(x) = x \operatorname{ctg} x$.

3. Классифицируйте точки разрыва функции $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot \sin x$.

4. Укажите все точки разрыва функции $y = \frac{x-2}{2^x-4}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва

5. Классифицируйте все точки разрыва функции $y = \frac{|x|}{x}$.

6. Докажите, что точка $x = 0$ для функции $y = \begin{cases} \frac{\cos x}{x} & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x = 0, \\ \cos\frac{1}{x} & \text{при } x > 0, \end{cases}$ является точкой разрыва.

Классифицируйте.

7. Укажите все точки разрыва функции $y = \frac{e^{x^4-2x^2+1}-1}{(x^2-x)(x^2-2)}$ и укажите тип, которому относится каждая точка разрыва.

1.2.10. Предел функции и непрерывные функции, контрольная работа

1.2.10.1. Предел функции и непрерывные функции. Контрольная работа.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–716-07-441

Предел функции и непрерывные функции: Контрольная работа

1. Укажите все значения γ, при которых $x^3 = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$. **2.** Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$. **3.** Найдите $\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+9}-4}{x-7}$. **4.** Вычислите $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+7x+5}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$. **5.** Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\operatorname{tg}3x}{x^3}$. **6.** Найдите $\lim_{x\to+\infty}\left(1-3/x\right)^{x/2}$. **7.** Найдите $\lim_{x\to 0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{3}{x}}$. **8.** Укажите наибольшее $\delta: \forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon,$ если $f(x)=5^x,\ a=2,\ b=f(a),\ \varepsilon=100$.
9. Пусть $f(x)=\sin x - x$ и $x\to 0$, $f(x)=o(x^\alpha)$ означает $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\alpha}=0$, или, что то же самое, $\frac{f(x)}{x^\alpha}=o(1)$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $f(x)=o(1)$. **(b)** $f(x)=o(x)$. **(c)** $f(x)=o(x^2)$. **(d)** $f(x)=o(x^3)$. **(e)** $f(x)=o(x^4)$. **(f)** $f(x)=o(x^5)$.
10. Классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$. **11.** Классифицируйте точки разрыва, $f(x)=\frac{x-1}{x(x^2-1)}\cdot e^{1/x}$. **12.** Докажите **(1)** $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+o(x)$, **(2)** $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$, $x\to 0$. **13.** Найдите df и d^2f, если $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$.
14. Напишите уравнение касательной, $f(x)=\sqrt{2x}$, $x_0=8$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–716-07-442

Предел функции и непрерывные функции: Контрольная работа

1. Укажите все значения γ, при которых $x^\gamma = o(x^2)$ при $x \to +0$. **2.** Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{x}$. **3.** Найдите $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{8x+1}-7}{x-6}$. **4.** Вычислите $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+9x+3}-\sqrt{4x^2-3x+1}\right)$. **5.** Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}x-\sin 2x}{x^3}$. **6.** Найдите $\lim_{x\to+\infty}\left(1-4/x\right)^{x/3}$ **7.** Найдите $\lim_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{2}{\sin x}}$. **8.** Укажите наибольшее $\delta: \forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon,$ если $f(x)=\log_3 x,\ a=81,\ b=f(a),\ \varepsilon=1$.
9. Пусть $f(x)=\sqrt{1+x}-1$ и $x\to 0$, $f(x)=o(x^\alpha)$ означает $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\alpha}=0$, или, что то же самое, $\frac{f(x)}{x^\alpha}=o(1)$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $f(x)=o(1)$. **(b)** $f(x)=o(x)$. **(c)** $f(x)=o(x^2)$. **(d)** $f(x)=o(x^3)$. **(e)** $f(x)=o(x^4)$. **(f)** $f(x)=o(x^5)$.
10. Классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\frac{x}{\sin x}$ **11.** Классифицируйте точки разрыва, $f(x)=\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}\cdot e^{-1/x}$. **12.** Докажите **(1)** $\frac{1}{1-x}=1+x+o(x)$, **(2)** $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+o(x^2)$, $x\to 0$. **13.** Найдите df и d^2f, если $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$.
14. Напишите уравнение касательной, $f(x)=\sqrt{2x}$, $x_0=32$.

1.2.11. Теоремы о непрерывных функциях

1.2.11.1. Непрерывные функции. Теоремы о непрерывных функциях.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–717-451

Непрерывные функции: Теоремы о непрерывных функциях

1. Пусть $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения:

$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$. $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$. $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to 0} x f(x) = 0$.
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

2. Укажите все верные утверждения

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то

$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
$\boxed{2}$ $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
$\boxed{3}$ график функции $f(x)$ имеет касательную в точке x_0
$\boxed{4}$ найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ непрерывна
$\boxed{5}$ $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.
$\boxed{6}$ найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–717-452

Непрерывные функции: Теоремы о непрерывных функциях

1. Пусть $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения:

$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to 0} x f(x) = 0$. $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$. $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$.

2. Укажите все верные утверждения

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то

$\boxed{1}$ найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена
$\boxed{2}$ график функции $f(x)$ имеет касательную в точке $(x_0;\ f(x_0))$
$\boxed{3}$ $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
$\boxed{4}$ $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.
$\boxed{5}$ $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
$\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–717-453

Непрерывные функции: Теоремы о непрерывных функциях

1. Пусть $f(x) = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$. Укажите все верные утверждения.

$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} x f(x) = 0$ $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} x^2 f(x) = 0$ $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} f(x^{-1}) = 0$

2. Укажите утверждения, выполнение любого из которых является достаточным условием непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = x_0$

$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
$\boxed{2}$ найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена
$\boxed{3}$ график функции $f(x)$ имеет наклонную касательную в точке x_0
$\boxed{4}$ $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
$\boxed{5}$ $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.
$\boxed{6}$ $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

1.2.12. Предел функции. Асимптотические формулы

1.2.12.1. Предел функции. Асимптотические формулы.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–718-461

Предел функции: Асимптотические формулы

1. Известно, что $\sin x = x + o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ при $x \in (-\pi/2;\ \pi/2)$. Докажите, что $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$. **2.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$. **3.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$. **4.** Вычислите $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin^2 3x - \sin 2x \cdot \sin x}$ **5.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(18x)\sin(12x)}{\sin^2(3x)}$. **6.** Найдите $\lim_{x\to 3} \frac{3^x - x^3}{x^3-27}$. **7.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(a-x) - 2\sin(a) + \sin(a+x)}{x^2}$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–718-462

Предел функции: Асимптотические формулы

1. Известно, что $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$, $\sin x = x + \gamma x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Докажите, что $\gamma = -1/6$. **2.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}-e^{3x}}{x}$. **3.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$. **4.** Вычислите $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{\sin^2 5x - \sin 3x \cdot \sin 8x}$ **5.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(18x)\sin(12x)}{\sin^2(3x)}$. **6.** Найдите $\lim_{x\to 4} \frac{4^x - x^4}{x^2-16}$. **7.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a-x) - 2\cos(a) + \cos(a+x)}{x^2}$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–718-463

Предел функции: Асимптотические формулы

1. Известно, что $\sin x = x + o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ при $x \in (-\pi/2;\ \pi/2)$. Докажите, что $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$. **2.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x}$. **3.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2}$. **4.** Вычислите $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin^2 3x - \sin 2x \cdot \sin x}$ **5.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(18x)\sin(12x)}{\sin^2(3x)}$. **6.** Найдите $\lim_{x\to 5} \frac{5^x - x^5}{\log_x 125 - 3}$. **7.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(a-x) - 2\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(a+x)}{x^2}$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–718-464

Предел функции: Асимптотические формулы

1. Известно, что $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$, $\sin x = x + \gamma x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Докажите, что $\gamma = -1/6$. **2.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}$. **3.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{5\sin x - \sin 5x}{x^3}$. **4.** Вычислите $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{\sin^2 5x - \sin 3x \cdot \sin 8x}$ **5.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(18x)\sin(12x)}{\sin^2(3x)}$. **6.** Найдите $\lim_{x\to 6} \frac{6^x - x^6}{\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{6}}$. **7.** Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a-x} - 2\sqrt{a} + \sqrt{a+x}}{x^2}$.

1.2.13. Предел функции. Теория

1.2.13.1. Предел функции. Теория.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–719-471

Предел функции: Теория

1. Пусть $f(x) = \sin x;\ a = 1;\ \epsilon = 0{,}1$. Найдите $\max\delta : \forall x \in (a-\delta;\ a+\delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$.

2. Используя формулу $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ при $x \to 0$, докажите, что $\sin 2x = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$ и найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

3. Пусть $y = f(x)$ – возрастающая функция, определенная на сегменте $[a;\ b]$. Сформулируйте необходимые и достаточные условия существования обратной функции на промежутке $[f(a);\ f(b)]$.

4. Сформулируйте и докажите теорему о существовании предела $\lim_{x\to b-0}$ для функции $y = f(x)$, которая на промежутке $x \in (a;\ b)$ является неубывающей.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–719-472

Предел функции: Теория

1. Пусть $f(x) = \cos x;\ a = 1;\ \epsilon = 0.1$. Найдите $\max\delta : \forall x \in (a-\delta;\ a+\delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$.

2. Используя формулу $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ при $x \to 0$, докажите, что $\operatorname{tg} 2x = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$ и найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

3. Пусть $y = f(x)$ – возрастающая функция, определенная на сегменте $[a;\ b]$. Сформулируйте необходимые и достаточные условия существования обратной функции на промежутке $[f(a);\ f(b)]$.

4. Сформулируйте и докажите теорему о существовании предела $\lim_{x\to b-0}$ для функции $y = f(x)$, которая на промежутке $x \in (a;\ b)$ является невозрастающей.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–719-473

Предел функции: Теория

1. Пусть $f(x) = \sin x;\ a = 2;\ \epsilon = 0.1$. Найдите $\max\delta : \forall x \in (a-\delta;\ a+\delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$.

2. Используя формулу $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ при $x \to 0$, докажите, что $\operatorname{tg} 3x = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$ и найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

3. Пусть $y = f(x)$ – возрастающая функция, определенная на сегменте $[a;\ b]$. Сформулируйте необходимые и достаточные условия существования обратной функции на промежутке $[f(a);\ f(b)]$.

4. Сформулируйте и докажите теорему о существовании предела $\lim_{x\to+\infty}$ для функции $y = f(x)$, которая на промежутке $x \in (a;\ +\infty)$ является неубывающей.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–719-474

Предел функции: Теория

1. Пусть $f(x) = \cos x;\ a = 2;\ \epsilon = 0.1$. Найдите $\max\delta : \forall x \in (a-\delta;\ a+\delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$.

2. Используя формулу $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ при $x \to 0$, докажите, что $\sin 3x = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$ и найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

3. Пусть $y = f(x)$ – возрастающая функция, определенная на сегменте $[a;\ b]$. Сформулируйте необходимые и достаточные условия существования обратной функции на промежутке $[f(a);\ f(b)]$.

4. Сформулируйте и докажите теорему о существовании предела $\lim_{x\to+\infty}$ для функции $y = f(x)$, которая на промежутке $x \in (a;\ +\infty)$ является невозрастающей.

1.2.14. Предел функции. Правило Лопиталя-1

1.2.14.1. Предел функции. Правило Лопиталя.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–1208-521x

Предел функции: Правило Лопиталя

1. Найдите $\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+9}-4}{x-7}$.

2. Вычислите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$.

3. Найдите $\lim_{x\to 3}\frac{3^x-x^3}{x^3-27}$.

4. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a-x)-2\sin(a)+\sin(a+x)}{x^2}$.

5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x\to e}\frac{e^{2x}-x^{2e}}{(x-e)^2}$.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–1208-522x

Предел функции: Правило Лопиталя

1. Найдите $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{8x+1}-7}{x-6}$.

2. Вычислите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$.

3. Найдите $\lim_{x\to 4}\frac{4^x-x^4}{x^2-16}$.

4. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a-x)-2\cos(a)+\cos(a+x)}{x^2}$.

5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x+x^2}-e^3(4x-3)}{(x-1)^2}$

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–1208-523x

Предел функции: Правило Лопиталя

1. Найдите $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{7x+1}-6}{x-5}$.

2. Вычислите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}$.

3. Найдите $\lim_{x\to 5}\frac{5^x-x^5}{\log_x 125-3}$.

4. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(a-x)-2\,\mathrm{tg}(a)+\mathrm{tg}(a+x)}{x^2}$.

5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x\to e}\frac{e^x-x^e}{(x-e)^2}$.

Т570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{W}$6–1208-524x

Предел функции: Правило Лопиталя

1. Найдите $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{5x-4}-4}{x-4}$.

2. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^\beta-(1+\beta x)^\alpha}{x}$.

3. Найдите $\lim_{x\to 6}\frac{6^x-x^6}{\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{6}}$.

4. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a-x}-2\sqrt{a}+\sqrt{a+x}}{x^2}$.

5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x+x^2}-e^2(3x-2)}{(x-1)^2}$

1.2.15. Предел функции. Правило Лопиталя-2

1.2.15.1. Предел функции. Правило Лопиталя.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–1208-521

Предел функции: Правило Лопиталя

1. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 7x}{x^2}$.

2. Используя правило Лопиталя, найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x}-\sqrt[3]{1+5x}}{x}$.

3. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[12]{1+4x}-\sqrt[15]{1+5x}}{x^2}$.

4. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-3\sin(x)}{x^3}$

5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x\to 6}\frac{6\sqrt{x+3}-x-12}{(x-6)^2}$.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–1208-522

Предел функции: Правило Лопиталя

1. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 5x-5\sin 7x}{x^3}$.

2. Используя правило Лопиталя, найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+5x}-\sqrt[5]{1+7x}}{x}$.

3. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+12x}-\sqrt[5]{1+15x}}{x^2}$.

4. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x)-3\arcsin(x)}{x^3}$

5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1-x}{x^2}$

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–1208-523

Предел функции: Правило Лопиталя

1. Найдите $\lim_{x\to b}\frac{b^x-x^b}{x-b}$ при $b=3$.

2. Используя правило Лопиталя, найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[12]{1+3x}-\sqrt[15]{1+5x}}{x}$.

3. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[18]{1+3x}-\sqrt[24]{1+4x}}{x^2}$.

4. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(3x)-3\,\mathrm{tg}(x)}{x^3}$

5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-e}{x^2}$

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–1208-524

Предел функции: Правило Лопиталя

1. Найдите $\lim_{x\to b}\frac{b^x-x^b}{(x-b)^2}$ при $b=e$.

2. Используя правило Лопиталя, найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[12]{1+4x}-\sqrt[15]{1+3x}}{x}$.

3. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+18x}-\sqrt[4]{1+24x}}{x^2}$.

4. Найдите $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}(3x)-3\,\mathrm{arctg}(x)}{x^3}$

5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x\to e}\frac{e^{ex}-x^{e^2}}{(x-e)^2}$.

1.3. Предел функции. Второй замечательный предел

1.3.0.2. Предел функции. Второй замечательный предел.

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–1208-571

Предел функции: Второй замечательный предел

1. Найдите $\lim_{x\to+0}\left(1+x/5\right)^{3/x}$.

2. Найдите $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{2x}$.

3. Вычислите $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\operatorname{tg}^2 x}$

4. Найдите $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4+3x}{4+x}\right)^{\frac{5}{x}}$.

5. Найдите $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+5}\right)^{4x}$.

6. $\star$ Вычислите $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+5x+6}\right)^{x}$

7. Вычислите $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+5}{x^2+3x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–1208-572

Предел функции: Второй замечательный предел

1. Найдите $\lim_{x\to+0}\left(1+2x\right)^{1/3x}$.

2. Найдите $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{3x}$.

3. Вычислите $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{tg} 2x}$

4. Найдите $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4+2x}{4+5x}\right)^{\frac{3}{x}}$.

5. Найдите $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+2}{4x+7}\right)^{3x}$.

6. Вычислите $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2}\right)^{\frac{\sin^2 2x}{x^2}}$

7. Вычислите $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+5}{x^2+3x+2}\right)^{x}$

T570 (2011-2012) МГУ Физический факультет Кафедра математики $\mathcal{K}1\ \mathcal{S}1\ \mathcal{W}6$–1208-573

Предел функции: Второй замечательный предел

1. Найдите $\lim_{x\to 0}\left(\frac{6+2x}{6+5x}\right)^{\frac{12}{x}}$.

2. Найдите $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^{5x}$.

3. Вычислите $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\operatorname{tg}^2 x}$

4. Найдите $\lim_{x\to 0}\left(\frac{5+6x}{5+x}\right)^{\frac{4}{x}}$.

5. Найдите $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+4}{5x+7}\right)^{6x}$.

6. Вычислите $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-3x+1}{x^2+4x+2}\right)^{\frac{x}{\sin 3x}}$

7. Вычислите $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$