Оглавление

2. Лекция 1. Предел функции одной переменной.

2.1. Числовые множества

2.1.1. Промежутки и множества

Напомним основные определения промежутков на числовой прямой,

1) Окрестность, $\Omega(a)=\left(a-\delta_1, a+\delta_2\right)$,

где $\delta_1>0$, $\delta_2>0$.

2) Шаровая (симметричная) окрестность, $\Omega_\delta(a)=(a-\delta, a+\delta)$, $\delta>0$.

3) Проколотая окрестность,

$\hat{\Omega}_{\delta}(a)=(a-\delta,a)\bigcup(a,a+\delta)$, $\delta>0$.

4) Левая окрестность,

$\Omega_{\delta}^{(-)}(a)=(a-\delta,a)$, $\delta>0$.

5) Правая окрестность,

$\Omega_{\delta}^{(+)}(a)=(a,a+\delta)$, $\delta>0$.

2.2. Ограниченные функции

2.2.1. Грани функции

Замечание. В этой главе всегда предполагаем, что функция $f(x)$ определена на множестве X.

Определение 1. Число B называется верхней гранью (в.г.) функции $f(x)$ на множестве X, если $\forall x \in X$ верно $f(x) \le B$.

Отрицание 2 (отрицание). Число B не является верхней гранью функции $f(x)$ на множестве X, если $\exists x \in X : f(x) > B$.

Теорема 1а. Если число B является верхней гранью функции $f(x)$ на множестве X и $D > B$, то число D также является верхней гранью $f(x)$ на множестве X. □ $\forall x \in X$ верно $f(x) \le B$, поэтому $\forall x \in X$ верно $f(x) \le B < D$, поэтому $\forall x \in X$ верно $f(x) \le D$. ■

Теорема 1б. Если B явл. в.г. $f(x)$ на X и $D > B$, то D также явл. в.г. $f(x)$ на X.

Самостоятельно:

Определение 2. Число A называется **нижней гранью** (н.г.) функции $f(x)$ на множестве X, если $\forall x \in X$ верно $f(x) \geq A$.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется **ограниченной сверху** на множестве X, если эта функция на этом множестве имеет верхнюю грань, т.е. если $\exists B : \forall x \in X$ верно $f(x) \leq B$.

Самостоятельно:

Определение 4. Функция $f(x)$ называется **ограниченной снизу** на множестве X, если эта функция на этом множестве имеет нижнюю грань, т.е. $\exists A : \forall x \in X$ верно $f(x) \geq A$.

Задание. Составьте отрицания.

2.2.2. Ограниченные функции

Определение 5. Функция $f(x)$ называется **ограниченной** на множестве X, если эта функция на этом множестве имеет верхнюю грань и имеет нижнюю грань, т.е. $\exists A, \exists B : \forall x \in X$ верно $A \le f(x) \le B$.

Равносильное определение:

Определение 6. Функция $f(x)$ называется **ограниченной** на множестве X, если $\exists B : \forall x \in X$ верно $|f(x)| \le B$.

2.2.3. Неограниченные функции

Определение 1. Функция $f(x)$ называется неограниченной на множестве X, если $\forall A \, \exists x \in X : \left| f(x) \right| > A$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется неограниченной сверху на множестве X, если $\forall A \, \exists x \in X : f\left(x\right) > A$.

Пример 1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на $X = (0;1)$ является ограниченной снизу, но неограниченной сверху.

□ 1) $\forall X \in (0;1)$ верно $f(x) \geq 0$, но

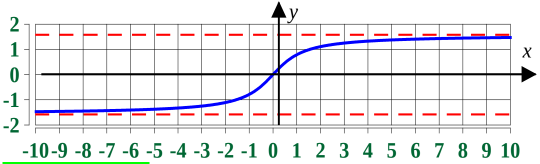
2) $\forall A \; \exists x \in (0;1) : f(x) > A$, а именно,

$x = 0{,}5$ при $A \leq 0$ и $x = \dfrac{1}{2A}$ при $A > 0$. ■

Пример 2. Функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ является ограниченной на множестве

$X = (-\infty, +\infty)$. □ Пусть $A = \dfrac{\pi}{2}$, и тогда

$\forall x \in X \quad |f(x)| \le A$. ■



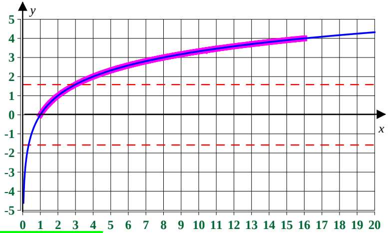
Пример 3. Функция $f(x) = \log_2 x$ на множестве $X = (0, +\infty)$ является неограниченной. □ Пусть $A > 0$.

1) Решим неравенство $\log_2 x > A$,

$x > 2^A$, $x \in X$.

2) Решим $\log_2 x < m$, $x \in (0; 2^m)$, $x \in X$.

Оба множества непустые.



Пример 4. Функция $f(x) = \log_2 x$ на множестве $X = [1; 16]$, $\log_2 [1;16] \in [0;4]$, ограничена.

См. предыдущий рисунок.

Обозначение ограниченной функции $f(x) = O(1)$ на множестве X.

Теорема 1 (ограниченность суммы, разности, произведения). Если $f(x) = O(1)$ (т.е. ограничена) на множестве X и $g(x) = O(1)$ на X, то

1) $f(x) + g(x) = O(1)$ на X,

2) $f(x)-g(x)=O(1)$ на X,

3) $f(x)\cdot g(x)=O(1)$, $x\in X$.

□ $\exists A:\forall x\in X$ верно $|f(x)|\le A$,

$\exists B:\forall x\in X$ верно $|g(x)|\le B$,

Так как $|a+b|\le|a|+|b|$, то

$|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|\le A+B.$

Поэтому $\forall x\in X$ верно

$|f(x)+g(x)|\le A+B$. ■

Замечание. Для операции деления утверждение теоремы не верно.

Задание. Приведите пример.

2.2.4. Локально ограниченные функции.

2.2.5. Лекция М02-2012-09-07

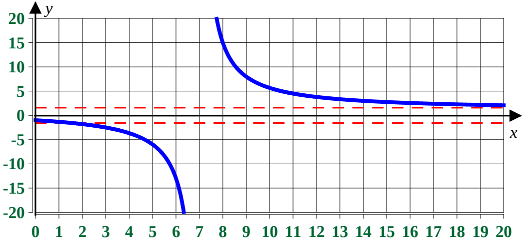
Определение 1. Функция $f(x)$, определенная в некоторой $\Omega(a)$, называется локально ограниченной в окрестности точки $x=a$, если она ограничена в некоторой окрестности точки $x=a$, т.е. если

$$\exists \delta > 0,\ \exists A : \forall x \in \Omega_{\delta}(a) \text{ верно } \left| f(x) \right| \le A.$$

Обозначение: $f(x) = O(1)$ в $\Omega(a)$.

Определение 2. Символ $O(1)$ на X означает ограниченную функцию на множестве X.

Пример. Пусть $f(x) = \dfrac{x+7}{x-7}$.



Это пример функции, локально ограниченной в окрестности любой точки числовой оси, кроме точки $x = 7$.

Теорема 1 (локальная ограниченность суммы, разности, произведения).
Если $f(x) = O(1)$ и $g(x) = O(1)$ в $\Omega(a)$ (в окрестности точки $x = a$), то
1) $f(x) + g(x) = O(1)$,
2) $f(x) - g(x) = O(1)$,
3) $f(x) \cdot g(x) = O(1)$ в $\Omega(a)$.

А.А.Быков boombook.narod.ru, boombook@yandex.ru

□ а) $\exists \delta_f > 0,\ \exists A_f : \forall x \in \Omega_{\delta_f}(a)$ верно $\left| f(x) \right| \le A_f$.

Б) $\exists \delta_g > 0,\ \exists A_g : \forall x \in \Omega_{\delta_g}(a)$ верно $\left| g(x) \right| \le A_g$.

Пусть $\delta = \min\left(\delta_f, \delta_g\right)$ и $A_f + A_g = A > 0$.

Тогда $\forall x \in \Omega_\delta(a)$ верно

$\left| f(x) + g(x) \right| \le A_f + A_g = A$. ■

2.3. Предел функции в точке.

2.3.1. Определение предела в точке.

Замечание 1. Для того, чтобы можно было исследовать существование и находить значение предела функции $f(x)$

при $x \to a$, достаточно потребовать, чтобы точка $x = a$ была предельной точкой области определения X функции $f(x)$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in X : 0 < |x - a| < \varepsilon .$$

Равносильное условие, $\forall \varepsilon > 0$ система $\begin{cases} x \in X, \\ 0 < |x - a| < \varepsilon \end{cases}$ имеет бесконечное множество различных решений.

Равносильное условие, $\exists x_n \in X$:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n > N$ верно $0 < |x_n - a| < \varepsilon$,

$n \in N$, или, иначе говоря, $x_n \to a$,

$x_n \neq a$.

Замечание 2. Мы предполагаем, что функция определена в $\hat{\Omega}(a)$. Из этого следует, что точка $x = a$ является предельной точкой области определения X функции $f(x)$. Обратное неверно.

Определение 1а. (предела функции в точке по Коши, на языке логических формул). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x = a$. Говорят, что

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta$$

верно $|f(x) - b| < \varepsilon$.

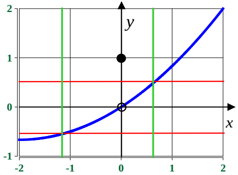
Опр.1б. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой $\hat{\Omega}(a)$. Говорят, что существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, если

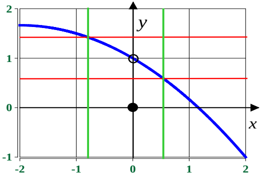
$$\exists b : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$$

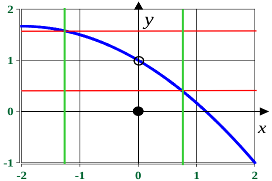
$\forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta$ верно

$|f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение 2. (предела функции в точке по Коши, на языке окрестностей). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой $\hat{\Omega}(a)$ (проколотой окрестности точки $x = a$). Говорят, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x \in X \bigcap \hat{\Omega}_{\delta}(a)$ верно $f(x) \in \Omega_{\varepsilon}(b)$.







Замечание. Еще раз напомним, что для того, чтобы можно было исследовать предел функции $f(x)$ при $x \to a$, достаточно потребовать, чтобы точка $x = a$ была предельной точкой области определения функции $f(x)$.

Отрицание определения предела функции в точке по Коши (на языке логических формул). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x = a$. Говорят, что число b не является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \quad \exists x \in X : 0 < \left| x - a \right| < \delta$ и

$\left| f(x) - b \right| \geq \varepsilon$.

Отрицание определения предела функции в точке по Коши (на языке окрестностей). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x = a$. Говорят, что число b не является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если

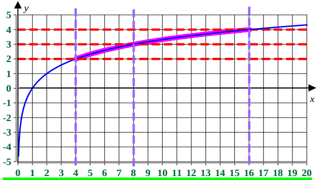
$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \bigcap \hat{\Omega}_{\delta}(a) :$

$f(x) \notin \Omega_{\varepsilon}(b)$.

Можно записать заключительную фразу этого определения в виде $f(x) \in \neg \Omega_{\varepsilon}(b)$ (дополнению).

Пример функции, имеющей предел:

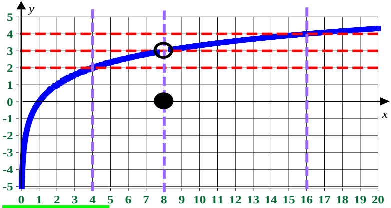
$\lim\limits_{x \to 8} \log_2 x = 3$



2012-09-17 Лекция h-2

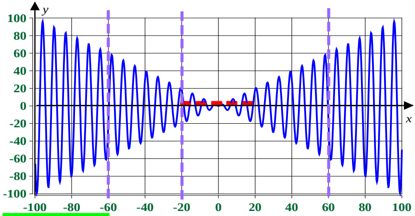
Пример функции, имеющей предел:

$$\lim_{x\to 8}\log_2 x = 3$$



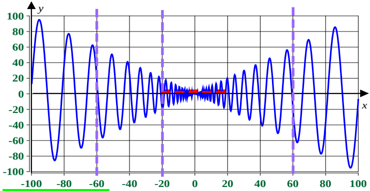
Пример функции, имеющей предел:

$$\lim_{x\to 0} x\sin x = 0.$$



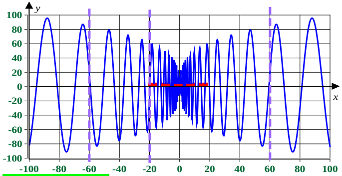
Пример функции, имеющей предел:

$$\lim_{x\to 0} x\sin(10\ln x) = 0.$$



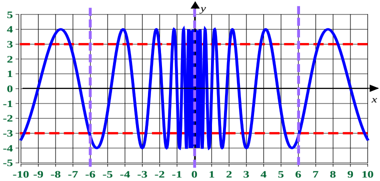
Пример функции, имеющей предел:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\sin(10\ln x) = 0.$$



Пример функции, не имеющей предела:

$$f(x) = 4\sin(10\ln(|x|)),\ \nexists \lim_{x\to 0} f(x).$$



2.3.2. Прямое доказательство существования предела

Пример 1 прямого доказательства существования предела. Докажем, что

$$\lim_{x\to 2} x^3 = 8.$$

Докажем даже, что $\forall a \lim\limits_{x\to a} x^3 = a^3$.

◻ Напомним определение предела, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in X : 0 < |x-a| < \delta$ верно $|f(x)-b| < \varepsilon$. Потребуем выполнения неравенства

$$|x^3 - a^3| < \varepsilon,$$

$$-\varepsilon < x^3 - a^3 < \varepsilon,$$

$$a^3 - \varepsilon < x^3 < a^3 + \varepsilon,$$

$$\sqrt[3]{a^3-\varepsilon} < x < \sqrt[3]{a^3+\varepsilon},$$

$$\sqrt[3]{a^3-\varepsilon} - a < x - a < \sqrt[3]{a^3+\varepsilon} - a,$$

$$\delta_2 = \sqrt[3]{a^3+\varepsilon} - a > 0, \text{ и}$$

$$-\delta_1 = \sqrt[3]{a^3-\varepsilon} - a < 0,$$

$$-\delta_1 < x - a < \delta_2, \ |x-a| < \min(\delta_1, \delta_2).$$

Важно то, что $\min\left(\delta_1,\delta_2\right)>0$,

$\delta(\varepsilon)=\min\left(\delta_1,\delta_2\right)$, поэтому

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall x:0<\left|x-a\right|<\delta$ верно

$\left|f(x)-b\right|<\varepsilon$. ■

Пример 2 прямого доказательства существования предела. Докажем, что

$\forall a\in\left(-1;1\right)$ верно $\lim\limits_{x\to a}\arcsin x=\arcsin a$.

□ $\left|\arcsin x-\arcsin a\right|<\varepsilon$,

$-\varepsilon<\arcsin x-\arcsin a<\varepsilon$,

Считаем, что $\varepsilon+\arcsin a<\dfrac{\pi}{2}$ и

$-\varepsilon+\arcsin a>-\dfrac{\pi}{2}$.

$-\varepsilon+\arcsin a<\arcsin x<\varepsilon+\arcsin a$,

$\sin(\arcsin a-\varepsilon)<x<\sin(\arcsin a+\varepsilon)$,

$$\begin{cases} -\left(a-\sin(\arcsin a-\varepsilon)\right)<x-a, \\ x-a<\sin(\arcsin a+\varepsilon)-a, \end{cases},$$

$$+\delta_2=\sin\left(\varepsilon+\arcsin a\right),$$

$$-\delta_1=\sin(-\varepsilon+\arcsin a),$$

$$-\delta_1<x-a<\delta_2, \quad |x-a|<\min\left(\delta_1,\delta_2\right).$$

Важно то, что $\min\left(\delta_1,\delta_2\right)>0$

$$\delta(\varepsilon)=\min\left(\delta_1,\delta_2\right),$$

поэтому $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall x:0<|x-a|<\delta$

$$|f(x)-b|<\varepsilon.\ \blacksquare$$

Хлопотное дело, имеются более эффективные средства исследования предела.

2.3.3. Методика вычисления пределов элементарных функций.

Задание: доказать, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, если (1) $f(x) = \sin x$, (2) $f(x) = \arcsin x$, (3) $f(x) = \log_a x$, (4) $f(x) = a^x$, и т.д.

2.3.4. Предел в бесконечно удаленной точке.

Замечание 1. Для того, чтобы можно было исследовать существование и находить значение предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, достаточно потребовать, чтобы точка $+\infty$ была предельной точкой области определения X функции $f(x)$, т.е. $\forall B > 0 \;\; \exists x \in X : x > B$.

Равносильное условие, $\forall B$ система $\begin{cases} x \in X, \\ x > B \end{cases}$ имеет бесконечное множество различных решений.

Равносильное условие, $\exists x_n \in X$: $\forall B\ \exists N : \forall n > N$ верно $x_n > B$, $n \in N$, или, иначе говоря, $x_n \to +\infty$.

Определение 1 (предела функции при $x \to +\infty$, по Коши, на языке логических формул). Пусть x_0 –любое число, и функция $f(x)$ определена на промежутке $x \in (x_0, +\infty)$. Говорят, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists A : \forall x > A$ верно $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение 2 (предела функции при $x \to +\infty$, по Коши, на языке окрестностей). Пусть функция $f(x)$ определена на $\Omega_R(+\infty) = (R, +\infty)$, значение R не важно. Говорят, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A : \forall x \in X \bigcap \Omega_A(+\infty)$ верно $f(x) \in \Omega_\varepsilon(b)$. Здесь $\Omega_R(+\infty) = (R, +\infty)$.

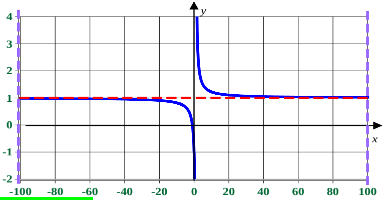
Замечание. Достаточно потребовать, чтобы функция $f(x)$ была определена на множестве X, для которого точка $+\infty$ является предельной точкой, т.е.

Определение 3 (отсутствия предела функции при $x \to +\infty$, по Коши). Пусть функция $f(x)$ определена на $(x_0, +\infty)$. Говорят, что число b не является пределом $f(x)$ при $x \to +\infty$, если

$\exists \varepsilon > 0 : \forall A \ \exists x \in X, x > A : \left| f(x) - b \right| \geq \varepsilon$.

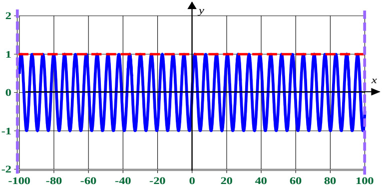
Пример функции, имеющей предел в

точке $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$.



Пример функции, не имеющей предела

в точке $+\infty$: $\nexists \lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$.



Эта функция не имеет предела и в точке $-\infty$.

Теорема 1. Если $f(x)$ есть периодическая функция, отличная от константы, то $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. $\square$ Заметим, что $\exists b_1$, $\exists b_2 \neq b_1$, $\exists x_1 \in X : f(x_1) = b_1$, $\exists x_2 \in X : f(x_2) = b_2$. Пусть $b_1 < b_2$ и положим $\varepsilon = \dfrac{b_2 - b_1}{3}$. Далее самостоятельно докажите, что никакое число b не может быть указанным пределом. $\blacksquare$

Пример прямого исследования,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$ $\left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$, $-\varepsilon < \dfrac{1}{x} < \varepsilon$, рассматриваем только $x>0$, $\frac{1}{x}<\varepsilon$, $x>\frac{1}{\varepsilon}$, так что $A(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$, ■

Пример прямого доказательства существования предела, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-3}=0$,

$\left|x^{-3}-0\right|<\varepsilon$, $-\varepsilon<x^{-3}<\varepsilon$, $x>0$,

$x^{-3}<\varepsilon$, $x^{3}>\varepsilon^{-1}$, $x>\sqrt[3]{\varepsilon^{-1}}$,

$A(\varepsilon)=\sqrt[3]{\varepsilon^{-1}}$ ■

Аналогично убедимся в том, что

$\forall n>0$ верно $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{n}}=0$.

Пример прямого исследования,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$.

$$\left|\frac{x+1}{x-1}-1\right|<\varepsilon,\ \left|\frac{x+1-x+1}{x-1}\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\frac{2}{x-1}\right|<\varepsilon,\ -\varepsilon<\frac{2}{x-1}<\varepsilon,$$ рассматриваем

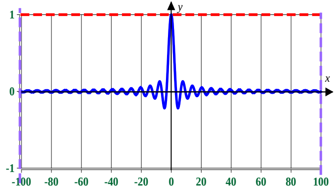
только $x>1,\ \dfrac{2}{x-1}<\varepsilon,\ \dfrac{2-\varepsilon x+\varepsilon}{x-1}<0,$

$$2-\varepsilon x+\varepsilon<0,$$

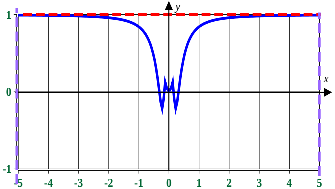
$2+\varepsilon<\varepsilon x,\ \ x>\dfrac{2+\varepsilon}{\varepsilon},$ так что

$$A(\varepsilon)=\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon},\ \blacksquare$$

Пример $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x \big/ x = 0.$



Пример $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1.$



Определение 4 (предела функции при $x\to-\infty$, по Коши, на языке логических формул). Пусть функция $f(x)$ определена при $x\in(-\infty, x_0)$, значение x_0 не важно. Говорят, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, если

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A > 0 : \forall x < A$ верно $\left| f(x) - b \right| < \varepsilon$.

Примеры прямого доказательства существования предела в бесконечно удаленной точке,

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1,$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2},$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2},$

Примеры прямого доказательства отсутствия предела в бесконечно удаленной точке,

1. $\nexists \lim\limits_{x \to +\infty} \sin x,$ (осциллирует)

2. $\nexists \lim\limits_{x \to +\infty} x,$ (бесконечно большая)

3. $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x$, (неограниченная)

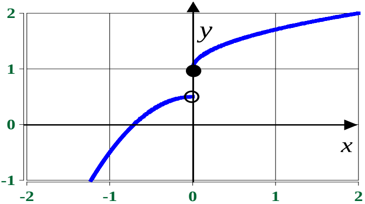
2.3.5. Лекция М3 2012-09-14

2.3.6. Бесконечно большая функция в точке

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена в $\hat{\Omega}(a)$. Говорят, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, или, что то же самое, $f(x)$ является б.б. положительной при $x \to a$, или, что то же самое, $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$, если $\forall A\ \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in X : 0 < |x-a| < \varepsilon$ верно $f(x) > A$.

Задание. Какая разница между бесконечно большой функцией и неограниченной функцией?

2.3.7. Односторонние пределы.



Определение 1 (предела функции в точке справа по Коши, на языке логических формул). Пусть функция $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки $x = a$. Говорят, что $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in X : a < x < a + \delta$ верно $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение 2 (предела функции в точке справа по Коши, на языке окрестностей). Пусть функция $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки $x = a$. Говорят, что $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \hat{\Omega}_{\delta}^{(+)}(a)$ верно

$f(x) \in \Omega_{\varepsilon}(b)$. Здесь $\hat{\Omega}_{\delta}^{(+)}(a) = (a, a + \delta)$.

Теорема 2. (связь односторонних пределов с пределом функции в точке).

1) Если $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$ и $\exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$.

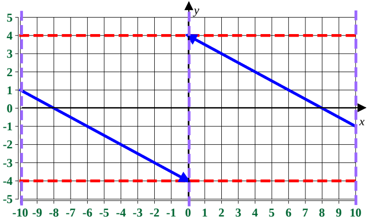
2) Если $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_1$ и $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_2$ и $b_1=b_2=b$, то $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

3) Если $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_1$ и $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_2$, причем $b_1\neq b_2$ то $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$

4) Если $\nexists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$, то $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Иначе говоря, наличие и равенство двух односторонних пределов является необходимым и достаточным условием наличия двустороннего предела.

Пример.



$\exists \lim\limits_{x\to+0} f(x) = 4,\ \ \exists \lim\limits_{x\to-0} f(x) = -4,$

$\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x).$

Прим 1. $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\left|x^2-1\right|}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\left|(x-1)(x+1)\right|}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{-(x+1)}{1}$

$= -2\,.$

Прим 2. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\left|(x-1)(x+1)\right|}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1-0}(x+1)=2.$

2.3.8. Свойства пределов.

Теорема 1 (о локальной ограниченности функции, имеющей предел). Если $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)=b,$ то $f(x)=O(1)$ в окрестности $x=a$.

Теорема 2. Если $f(x)$ определена в $\hat{\Omega}_{\delta_f}(a)$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b,$ $g(x)$ определена в $\hat{\Omega}_{\delta_g}(a)$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=c,$ то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=b+c,$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=b-c$,

3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=b\cdot c$,

4) если к тому же $c\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b}{c}$.

□1. а) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0:\forall x\in\hat{\Omega}_{\delta 1}(a)$ верно $\left|f(x)-b\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,

б) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0:\forall x\in\hat{\Omega}_{\delta 2}(a)$ верно $\left|g(x)-c\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Поэтому $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ и $\forall x\in\hat{\Omega}_{\delta}(a)$ верно

$\left|f(x)+g(x)-b-c\right|<\varepsilon$. ■

□4. a) $\forall \varepsilon_1 > 0 \;\; \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in \hat{\Omega}_{\delta 1}(a)$ верно $\left| f(x) - b \right| < \varepsilon_1$, $f(x) = b + p(x)$, $\left| p(x) \right| < \varepsilon_1$.

b) $\forall \varepsilon_2 > 0 \;\; \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in \hat{\Omega}_{\delta 2}(a)$ верно $\left| g(x) - c \right| < \varepsilon_2$, $g(x) = c + q(x)$, $\left| q(x) \right| < \varepsilon_2$.

c) Пусть для определенности $c > 0$. Тогда $\exists \delta_3 > 0 : \forall x \in \hat{\Omega}_{\delta 3}(a)$ верно

$$\left| g(x) - c \right| < \frac{c}{2},\; -\frac{c}{2} < g(x) - c < \frac{c}{2},$$

$$\frac{c}{2} < g(x) < \frac{3c}{2},\; \frac{1}{g(x)} < \frac{2}{c}.$$

Поэтому при $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$ и

$\forall x \in \hat{\Omega}_\delta(a)$ верно

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c}\right| = \left|\frac{f(x)c - g(x)b}{g(x)c}\right|$$

$$= \left|\frac{(b + p(x))c - (c + q(x))b}{g(x)c}\right|$$

$$= \frac{1}{|g(x)|}\left|\frac{p(x)c - q(x)b}{c}\right| < \frac{2}{|c|}\frac{\varepsilon_1|c| + \varepsilon_2|b|}{|c|}$$

$$< \frac{2}{|c|}\varepsilon_1 + \frac{2|b|}{c^2}\varepsilon_2 = \varepsilon$$, если положить

$$\frac{2}{|c|}\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \frac{2|b|}{c^2}\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}. \blacksquare$$

Пример 1. найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+0+0}{1-0+0}=1.$$

Пример 2. найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x+1}\ \lim_{x\to+\infty}x\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\frac{1+0+0}{1-0+0}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty.$$

Заметим, что в данном случае предел не существует, но функция является бесконечно большой положительной, обозначаем символом $+\infty$.

Пример 3. найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^3-x+1}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{0+0+0}{1-0+0}=0.$$

Теорема. Пусть $m\geq 1$ и $n\geq 1$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0},$$

где $a_n\neq 0$, $b_m\neq 0$,

1) равен 0 при $0\leq n<m$,

2) равен $\dfrac{a_n}{b_m}$ при $0 \le n = m$,

3) ∞ (не существует) при $0 \le m < n$, причем в этом случае функция бесконечно большая, так что можно также записать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \ldots = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to\infty} \ldots = -\infty$ в зависимости от знаков $a_n \ne 0$, $b_m \ne 0$.

2.3.9. Простые неопределенности.

Пример 1. Найдите $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6}$.

Заметим, что при $x = 3$ числитель и знаменатель равны нулю.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x-4}{x-2} = \lim_{x\to 3}\frac{3-4}{3-2} = -1.$$

Пример 2. Найдите $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}$.

Заметим, что при $x=3$ числитель и знаменатель равны нулю.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+13}-4\right)\left(\sqrt{x+13}+4\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+13}+4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+13}+4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+13}+4} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+13}+4} = \frac{1}{8}.$$