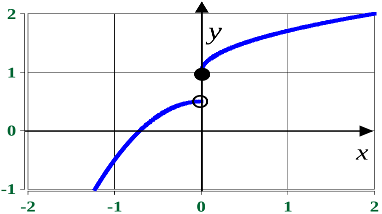
. Лекция 2. Бесконечно малые функ- и.

Оглавление

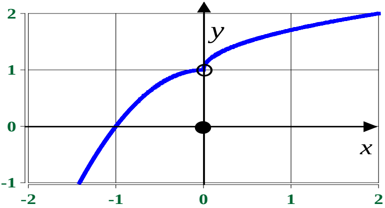
11.1. Примеры (односторонний предел)

Пример 1. $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=1$, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

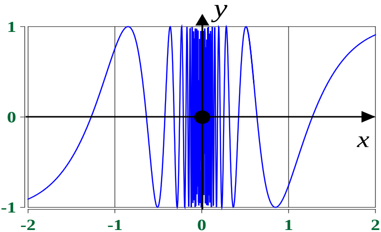


Пример 2. $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to +0} f(x)=1,$

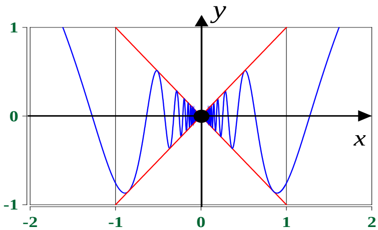
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$



Пример 3. $\nexists \lim\limits_{x\to -0} f(x)$, $\nexists \lim\limits_{x\to +0} f(x)$, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

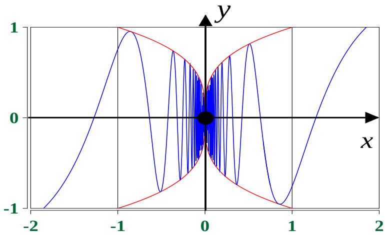


Пример 4. $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=0$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.



Пример 5. $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.



11.2. Понятие бесконечно малой функции

Пусть X есть область определения функции $f(x)$ и точка $x=a$ является предельной точкой X. В дальнейшем это условие всегда считаем выполненным.

Определение 1а (бесконечно малой функции в точке). Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой (б.м.) при $x\to a$.

Определение 1б (равносильное). Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in X : 0<\left|x-a\right|<\delta$ верно $\left|f(x)\right|<\varepsilon$.

Обозначение бесконечно малой функции:

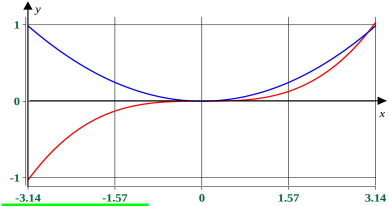
$f(x)=o(1)$ при $x\to a$.

Пример 1. $f(x)=x^n,\ n>0$, является б.м. при $x\to 0$. $\square$ Докажем, что

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall x:0<|x-a|<\delta$ верно

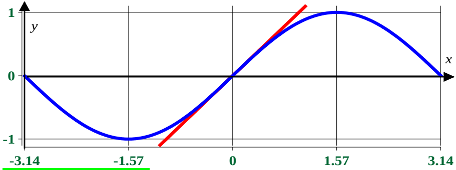
$|x^n|<\varepsilon$. Пусть $\varepsilon>0$. Мы хотим, чтобы было верным неравенство $|x^n|<\varepsilon$, $|x|<\sqrt[n]{\varepsilon}$, выберем $\delta=\sqrt[n]{\varepsilon}$. Тогда при $|x|<\delta$ будет

$0<|x^n|<\varepsilon$. $\blacksquare$



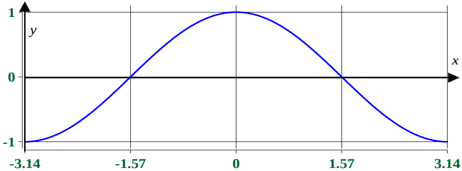
Пример 2. $f(x)=\sin x$ является б.м. при $x\to 0$. $\square$ Из курса средней школы известно,

что $0 < \sin x < x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому можно положить $\delta = \varepsilon$, и при $|x| < \delta$ будет $|x| < \varepsilon$, и поэтому $|\sin x| < \varepsilon$. ■



Пример 3. $f(x) = \cos x$ не является б.м. при $x \to 0$. Однако, эта функция имеет предел, равный 1. □ Из курса средней школы известно, что

$$\frac{1}{2} < \cos x < 1 \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{3},\ |\cos x| \ge \frac{1}{2}.$$



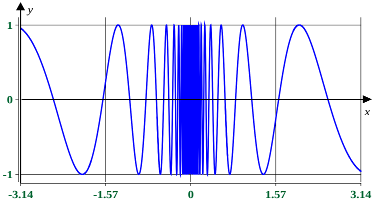
Пример 4. 1) Функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ не является б.м. при $x\to 0$. 2) Функция $f(x)$ не имеет предела в точке $x=0$.

□ Докажем, что никакое число b не может быть пределом, так что предела нет. Пусть $\varepsilon=\frac{1}{2}$ и $\delta>0$ –любое число. Пусть

$N=\left[\frac{1}{2\pi\delta}+1\right]$. При $\hat{x}=\left(\frac{\pi}{2}+2\pi N\right)^{-1}$ будет

$f(\hat{x})=1$, а при $\breve{x}=\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi N\right)^{-1}$ будет

$f(\breve{x}) = -1$, и по крайней мере в одном случае будет одновременно $0 < |x - a| < \delta$ и $|f(x) - b| \geq \varepsilon$ при любом b.



11.3. Свойства бесконечно малых функций

Напомним, что X есть область определения функции $f(x)$ и точка $x = a$ является предельной точкой X. В дальнейшем это условие всегда считаем выполненным. Если в данной теореме упомянуты несколько функций, то данное условие предполагается выполненным для пересечения их области определения.

Теорема 1. Если $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то

1) $f(x) - b = o(1)$, 2) $f(x) = b + o(1)$.

□ Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$\exists \delta > 0 : \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta$ верно

$|f(x) - b| < \varepsilon$, поэтому $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) - b \right) = 0$, так

что $f(x) - b = o(1)$. ■

Теорема 2. Если $f(x) = o(1)$ при $x \to a$, то

$\exists \lim\limits_{x \to a} \left(b + f(x) \right) = b$, или, что то же самое,

$\exists \lim\limits_{x \to a} \left(b + o(1) \right) = b$. (имеется в виду $o(1)$ при

$x \to a$).

□ самостоятельно. ■

Теорема 3. (арифметические операции над бесконечно малыми функциями):

1) $o(1)+o(1)=o(1)$,

2) $o(1)-o(1)=o(1)$,

3) $o(1)\cdot o(1)=o(1)$.

Во всех случаях предполагаем, что $x\to a$ или $x\to+\infty$, и еще раз напомним предположение об области определения.

□ Пусть $f(x)=o(1)$ при $x\to a$, $g(x)=o(1)$ при $x\to a$, и $\varepsilon>0$. Тогда

а) $\exists\delta_1>0:\forall x:0<|x-a|<\delta_1$ верно $|f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

б) $\exists\delta_2>0:\forall x:0<|x-a|<\delta_2$ верно $|g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, $\delta>0$.

Тогда $\forall x:0<|x-a|<\delta$ верно

$$|f(x)+g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}.$$ ■

При доказательстве использовано свойство неравенств: $|u+v| \le |u|+|v|$.

11.4. Понятие неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$

Пример. Пусть $x \to 0$, $f(x)=x^2$, $f(x)=o(1)$ при $x \to 0$, $g(x)=x^3$, $g(x)=o(1)$ при $x \to 0$, тогда

1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{x}$ неограниченная при $x \to 0$.

2) $\dfrac{g(x)}{f(x)}=x=o(1)$ при $x \to 0$.

А.А.Быков boombook.narod.ru, boombook@yandex.ru

11.5. Свойства бесконечно малых и ограниченных функций

Определение 1. Будем записывать $f(x)=O(1)$ на множестве X в том и только в том случае, когда $f(x)$ ограничена на X.

Определение 2. Будем записывать $f(x)=O(1)$ в окрестности точки $x=a$, если и только если найдется такая окрестность точки $x=a$, на которой $f(x)$ ограничена. Данное определение применяем только к функциям $f(x)$, для которых точка $x=a$ является предельной точкой области определения X.

Определение 3. Будем записывать $f(x)=O(1)$ при $x\to a$, если и только если $f(x)=O(1)$ в окрестности точки $x=a$.

Определение 4. Будем записывать $f(x)=O(g(x))$ на X в том и только в том случае, когда $\dfrac{f(x)}{g(x)}=O(1)$ и $g(x)\neq 0$ на X.

Аналогично определяем $f(x)=O(g(x))$ в окрестности точки $x=a$ и при $x\to a$.

Теорема 1. $o(1)+O(1)=O(1)$ при $x\to a$.

□ Пусть

1) $f(x)=o(1)$ (бесконечно малая) при $x\to a$,

2) $g(x)=O(1)$ (ограничена) в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$. Тогда

1) $\exists\delta_1 > 0 : \forall x \in (a-\delta_1, a)\bigcup(a, a+\delta_1)$ верно $f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

2) $\exists A, \exists\delta_2 > 0 : \forall x \in (a-\delta_2, a)\bigcup(a, a+\delta_2)$ верно $g(x) \in (-A, A)$. Пусть $\delta = \min(\delta_1;\delta_2)$, тогда $\forall x \in (a-\delta, a)\bigcup(a, a+\delta)$ верно $f(x) + g(x) \in (-A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, поэтому функция $f(x) + g(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a. ■

Теорема 2. $o(1)\cdot O(1) = o(1)$ при $x \to a$.

□ (начало повторяется), $f(x) \in (-\varepsilon_1, +\varepsilon_1)$, $g(x) \in (-A, A)$, $f(x)\cdot g(x) \in (-A\varepsilon_1, +A\varepsilon_1)$, $\exists\delta > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta$ верно $|f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon$, где $A\varepsilon_1 = \varepsilon$. ■

Теорема 3. $o(1)\cdot O(1) = O(1)$ при $x \to a$. Самостоятельно.

11.6. m4-2012-09-18

11.7. Теоремы о пределах

Теорема 1 (единственность предела). Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b_1$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b_2$, то $b_1=b_2$, т.е. предел (если существует) единствен.

$\square$ (от противного). Если, например, $b_1<b_2$, положим $\varepsilon=\dfrac{b_2-b_2}{3}$, и тогда

$\exists\delta_1>0:\forall x:0<|x-a|<\delta_1$ верно $|f(x)-b_1|<\varepsilon$,

$\exists\delta_2>0:\forall x:0<|x-a|<\delta_2$ верно $|f(x)-b_2|<\varepsilon$,

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $\forall x : 0 < |x - a| < \delta$ верно

$$f(x) < b_1 + \frac{b_2 - b_1}{3} < b_2 - \frac{b_2 - b_1}{3} < f(x). \blacksquare$$

Теорема 2. (о свойствах пределов функций).
Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, то

1) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = b + c$,

2) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - g(x)) = b - c$,

3) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = bc$.

4) Если к тому же $c \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.

$\square$ 1. Пусть $f(x) = b + o(1)$, $g(x) = c + o(1)$,

$f(x) + g(x) = b + c + o(1) + o(1)$,
$o(1) + o(1) = o(1)$, поэтому

$f(x)+g(x)=b+c+o(1)$ или

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=b+c.$ ■

□ 2

$f(x)\cdot g(x)=bc+b\cdot o(1)+c\cdot o(1)+o(1)\cdot o(1)$

$c\cdot o(1)=O(1)\cdot o(1)=o(1),$ поэтому

$f(x)\cdot g(x)=bc+o(1),$ или

$\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=bc.$ □

11.8. Комментарий 2

□ 4. Пусть, например, $c>0$. В некоторой $\overset{\frown}{\Omega}(a)$ верно $\left|g(x)-c\right|<\frac{c}{2}$, $-\frac{c}{2}<g(x)-c<\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2}<g(x)<\frac{3c}{2}$, $0<\frac{1}{g(x)}<\frac{2}{c}$. Оценим

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b}{c}\right|=\left|\frac{f(x)c-g(x)b}{g(x)c}\right|$$

$$<\frac{2}{c}\cdot\frac{\left|\left(b+o(1)\right)c-\left(c+o(1)\right)b\right|}{c}=\frac{2}{c^2}\left|o(1)c+o(1)b\right|$$

$=o(1)$. ■

11.9. Предел сложной функции

Теорема 1. Если $g(x)$ определена в $\hat{\Omega}(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, $f(t)$ определена в $\Omega(c)$, $\lim\limits_{t\to c} f(t)=b$ и $f(c)=b$, то $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=b$.

□ будет дано в параграфе о непрерывных функциях.

11.10. О функциях, не имеющих предела

Теорема 1. Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\nexists \lim\limits_{x\to a} g(x)$, то $\nexists \lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$.

□ (от противного). Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$.

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a}\left[\left(f(x)+g(x)\right)-f(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} g(x)$,

а это противоречит условиям. ■

Неверная НеТеорема 2. Если

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\nexists \lim\limits_{x\to a} g(x)$, то $\nexists \lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$.

□ Приведем пример: $f(x)=x$, $g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$,

$f(x)g(x)=x\sin\dfrac{1}{x}\to 0$ при $x\to 0$.

Теорема 2. Если $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$, $\nexists \lim\limits_{x \to a} g(x)$, то $\nexists \lim\limits_{x \to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right)$. □ Докажите сами. ■

Неверная НеТеорема 3. Если $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\nexists \lim\limits_{x \to a} g(x)$, то $\nexists \lim\limits_{x \to a}\left(f(x) + g(x)\right)$.

□ Пример: $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $g(x) = -\sin\dfrac{1}{x}$, $f(x) + g(x) = 0 \to 0$ при $x \to 0$.

11.11. Предельный переход в неравенствах

Теорема 1. Если $f(x) \leq g(x)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, то $b \leq c$.

Замечание. Даже если $f(x) < g(x)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, то можно сделать вывод только о том, что $b \leq c$. Нельзя утверждать, что $b < c$.

□ Пусть $b>c$. Положим $\varepsilon=\dfrac{b-c}{3}>0$.

$\exists\delta>0:\forall x\in(a-\delta,a)\bigcup(a,a+\delta)$ верно $f(x)\in(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$, $g(x)\in(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$, но $b-\varepsilon>c+\varepsilon\Rightarrow f(x)>g(x)$, противоречие ■

Теорема 2. Если $\forall x\in\hat{\Omega}(a)$ верно $f(x)\le g(x)\le h(x)$, и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b,$ $\lim\limits_{x\to a}h(x)=b,$ то $\exists\lim\limits_{x\to a}g(x)=b.$

□ Положим $\varepsilon>0$,

$\exists\delta>0:\forall x\in(a-\delta)\bigcup(a+\delta)$ верно $f(x)\in(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$, $h(x)\in(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$, поэтому $b-\varepsilon<g(x)<b+\varepsilon$ ■

11.12. Бесконечно большие функции.

(Замечание об области определения).

Определение 1. (бесконечно большой положительной функции в точке). Функция $f(x)$, определенная в $\hat{\Omega}(a)$, называется бесконечно большой положительной (б.б.+) при $x \to a$, если $\forall A \ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta$ верно $f(x) > A$.

Обозначение: $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$.

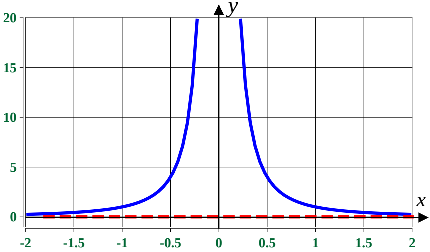
Напомним, что $\hat{\Omega}(a) = (a-\delta_1, a) \bigcup (a, a+\delta_2)$.

Отрицание определения (бесконечно большой положительной функции в точке). Функция $f(x)$, определенная в $\hat{\Omega}(a)$, не является бесконечно большой положительной при $x \to a$, если $\exists A : \forall \delta > 0 \ \exists x : 0 < |x-a| < \delta \bigcap f(x) \le A$.

Пример прямого исследования. Докажем, что $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ есть бесконечно большая положительная при $x \to 0$. Пусть $A > 0$. Решим неравенство $\frac{1}{x^2} > A$, $0 < x^2 < \frac{1}{A}$, $|x| \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{A}}\right)$,

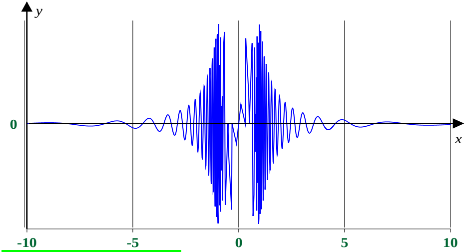
поэтому можно взять $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$. Итак,

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ – бесконечно большая положительная функция при $x \to 0$.



Замечание. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ есть неограниченная сверху при $x\to 0$.

Пример. $f(x)=\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$ не является бесконечно большой (но является неограниченной) при $x\to 0$.

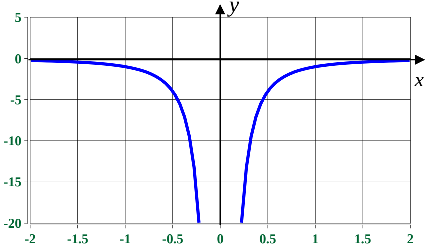


Определение (бесконечно большой отрицательной функции в точке). Функция $f(x)$, определенная в $\hat{\Omega}(a)$, называется бесконечно

большой отрицательной при $x \to a$, если
$\forall A \ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \ \ f(x) < A.$

Обозначение: $f(x) \to -\infty$ при $x \to a$.

Пример: $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ при $x \to 0$.



Теорема. Если $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$, то $f(x)$ неограничена в окрестности точки $x = a$.

Замечание. Существуют неограниченные функции $f(x)$ в окрестности точки $x = a$, которые не являются бесконечно большими при $x \to a$.

Определение (бесконечно большой отрицательной функции в точке справа). Функция $f(x)$, определенная в $\Omega^{(+)}(a)$, называется бесконечно большой отрицательной при $x \to a+0$ (т.е. справа), если $\forall A \ \exists \delta > 0 : \forall x \in X : 0 < x - a < \delta$ верно $f(x) < A$

Обозначение: $f(x) \to -\infty$ при $x \to a+0$.

Пример: $f(x) = -\dfrac{1}{x}$,

$f(x) \to -\infty$ при $x \to +0$,

$f(x) \to +\infty$ при $x \to -0$.

Теорема 1. Если $f(x) = o(1)$ при $x \to a$ и $f(x) > 0$, то $\dfrac{1}{f(x)} \to +\infty$ при $x \to a$.

Теорема 2. Если $f(x) \to +\infty$ при $x \to a+0$, то

$$\frac{1}{f(x)} \to +0 \text{ при } x \to a+0.$$

□ Докажите сами.

Пример приведите самостоятельно.

Краткая запись: $\dfrac{1}{o(1)} = \infty$, $\dfrac{1}{+\infty} = o(1)$.

11.13. Арифметические операции над б.б.ф

Теорема 1. Если

1) $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$,

2) $g(x) \to +\infty$ при $x \to a$, то

а) $f(x) + g(x) \to +\infty$ при $x \to a$,

б) $f(x) \cdot g(x) \to +\infty$ при $x \to a$.

□ Докажите сами. ■

11.14. Бесконечно большие функции при $x \to +\infty$.

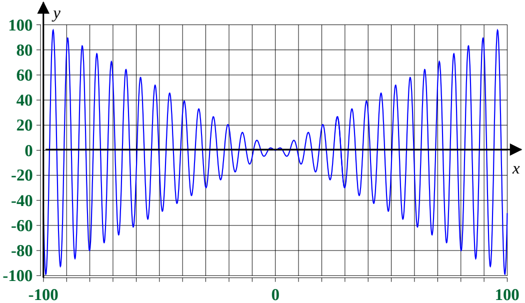
Пусть $+\infty$ есть предельная точка области определения X функции $f(x)$, т.е. $\forall B\ \exists x \in X : x > B$.

Определение 1. Говорят, что $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, если $\forall A\ \ \exists B : \forall x > B$ верно $f(x) > A$.

Отрицание. $\exists A : \forall B\ \exists x > B : f(x) \le A$.

Пример 1: Если $f(x) = \sqrt{x}$, то $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

Пример 2: Если $f(x) = x \sin x$, то неверно, что $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Однако эта функция является неограниченной на множестве $x \in (0, +\infty)$.



Теорема (о бесконечно больших и ограниченных функциях). Если $f(x)$ ограничена в окрестности $x=a$, а $g(x)\to+\infty$ при $x\to a$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to 0$ при $x\to a$.

Другая формулировка той же теоремы:

$$\frac{O(1)}{+\infty}=o(1).$$

11.15. Понятие неопределенности типа $+\infty-\infty$

Пример 1. $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$,
$f(x)-g(x)=x^2-x^3\to-\infty$ при $x\to+\infty$.

Пример 2. $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$,
$g(x)-f(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$.

Пример 3. $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x^2-1$,
$g(x)-f(x)\to 2$ при $x\to+\infty$.

11.16. Сравнение бесконечно малых функций.

Определение 1. Говорят, что $f(x)=o(x)$ при $x\to 0$, если $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$. Иначе говоря,
$\dfrac{f(x)}{x}=o(1)$, или даже $f(x)=x\cdot o(1)$.

Определение 2. Говорят, что $f(x)=o(x^n)$ при $x\to 0$, если $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=0$. Иначе говоря, $f(x)=o(x^n)$ равносильно $\dfrac{f(x)}{x^n}=o(1)$, или даже $f(x)=x^n\cdot o(1)$.

11.17. Принцип прозрачности символа $o(\ldots)$

$o(x^n)=x^n\cdot o(1)$, $x^n\cdot o(1)=o(x^n)$.

Пример. $x^2o(x)=o(x^3)$.

11.18. Примеры применения символа $o(\ldots)$

Пример 1. Докажем, что $\dfrac{1}{1-x}=1+x+o(x)$, $x\to 0$.

□ $\dfrac{1}{1-x}-1-x=\dfrac{1-1+x-x+x^2}{1-x}=$

$=\dfrac{x^2}{1-x}=x\dfrac{x}{1-x}=xo(1)=o(x).$ ■

Пример 2. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+o(x^2)$ при $x\to 0$.

□ $\dfrac{1}{1-x}-1-x-x^2=\dfrac{x^3}{1-x}=x^2\dfrac{x}{1-x}=o(x^2)$. ■

Пример 3. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3)$ при $x\to 0$.

Пример 4. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+o(x^n)$ при $x\to 0$.

Пример 5. $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2+o(x^2)$ при $x\to 0$.

11.19. Символ $f(x)=o\left(x^{\alpha}\right)$ при $x\to+\infty$

Определение 1. Говорят, что $f(x)=o(x^{\alpha})$ при $x\to+\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^{\alpha}}=0$, или, что то же самое, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\alpha}f(x)=0$.

Определение 2. Говорят, что $f(x)=o(x^{-n})$ при $x\to+\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{1/x^{n}}=0$, или, что то же самое, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{n}f(x)=0$.

11.20. h3-2012-09-24

Пример 1а. $x^2=o(x^3)$ при $x\to+\infty$.

Пример 1б. $x^3=o(x^2)$ при $x\to 0$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1.$

□ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x-1}=0,$ поэтому

$\dfrac{x+1}{x-1}=1+o(1)$ при $x\to+\infty$. ■

Пример 3. $\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right).$ при $x\to+\infty$.

□ $\dfrac{x+1}{x-1}-1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{x(x-1)}=o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ■

11.21. Техника вычисления пределов

Пример 4. Докажем, что $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}+o(x)$

при $x\to 0$, или, что то же самое,

$\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}=o(x)$.

$$\square\ \frac{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}}{x}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}\right)\left(\sqrt{1+x}+1+\dfrac{x}{2}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1+\dfrac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{1+x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{4}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1+\dfrac{x}{2}\right)}=\frac{-\dfrac{x^2}{4}}{x\left(\sqrt{1+x}+1+\dfrac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{-x}{4\left(2+o(1)\right)}=o(1)\,.$$

Пример 5a. Докажем, что

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2) \text{ при } x\to 0 \text{, или}$$

$$\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}=o(x^2),\ x\to 0. \blacksquare$$

Пример 5b. Докажем, что

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2) \text{ при } x\to 0.$$

Самостоятельно.

Пример 6. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$. $\square$

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$$

$$=\frac{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)+1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)-2}{x^2}$$

$$=\frac{-\frac{x^2}{4}+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{4}+o(1),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=-\frac{1}{4}.\ \blacksquare$$

Пример 7. Докажем, что $\sqrt[3]{1+x}-1-\frac{x}{3}=o(x)$ при $x\to 0$, или $\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}+o(x)$.

□ Заметим, что

$$\frac{u-v}{x}=\frac{(u-v)(u^2+uv+v^2)}{x(u^2+uv+v^2)},\quad \frac{\sqrt[3]{1+x}-1-\frac{x}{3}}{x}=$$

$$= \frac{1+x-\left(1+\frac{x}{3}\right)^3}{x\left[\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\left(1+\frac{x}{3}\right)+\left(1+\frac{x}{3}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1+x-\left(1+x+o(x)\right)}{x\left[\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\left(1+\frac{x}{3}\right)+\left(1+\frac{x}{3}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{o(x)}{x\left[\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\left(1+\frac{x}{3}\right)+\left(1+\frac{x}{3}\right)^2\right]}$$

$$= o(1).$$

11.22. Пределы в бесконечно удаленной точке

Пример 1. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=o(1)$ при $x\to+\infty$.

□ $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=o(1)$. ■

Пример 2. $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=o(1)$ при $x\to+\infty$. □

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=o(1).$$ ■

Пример 3. $x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=1+o(1)$ при $x\to+\infty$.

□ $x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)= \;=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{1+x^{-2}}+\sqrt{1-x^{-2}}} \;=\dfrac{2}{2+o(1)} \;=1+o(1)$. ■

Пример 4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=1.$

$x\to+\infty.$

□ $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x} \;=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{1+x^{-1}}+\sqrt{1-x^{-1}}} \;=\dfrac{2}{2+o(1)} \;=1+o(1)$. ■