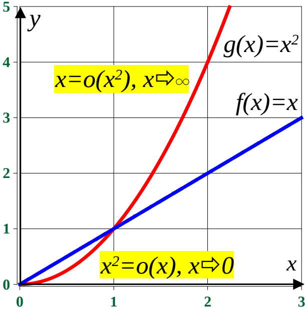
Оглавление

Лекция 3. Первый и второй замечательные пределы

3.1. Формула, выражающая первый замечательный предел

3.1.1. Напоминание о бесконечно малых



$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = b + o(1),$$

1. $o(1) + o(1) = o(1),$
2. $o(1) \cdot o(1) = o(1),$
3. $C \cdot o(1) = o(1),$
4. $O(1) \cdot o(1) = o(1),$
5. $O(1) + o(1) = O(1),$
6. $O(1) + O(1) = O(1),$
7. $O(1) \cdot O(1) = O(1),$
8. $x = o(1), \ x \to 0,$
9. $x^2 = o(1), \ x \to 0,$
10. $x^\alpha = o(1), \ x \to 0, \ \alpha > 0,$

11. $f(x) = o(g(x))$, $x \to 0$, означает, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} = o(1)$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x)\cdot o(1)$ при $g(x) \neq 0$.

12. $x^3 = o(x^2)$, $x \to 0$, означает, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = x^2 o(1)$.

13. $x^p = o(x^q)$, $x \to 0$, $p > q$ означает, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^p}{x^q} = 0$.

14. $x^2 = o(x^3)$, $x \to +\infty$ означает, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0.$$

15. $\sin x = o(1)$, $x \to 0$,
16. $\cos x = 1 + o(1)$, $x \to 0$,
17. $\operatorname{tg} x = o(1)$, $x \to 0$,
18. $\sqrt{1+x} = 1 + o(1)$, $x \to 0$,
19. $\sqrt[3]{1+x} = 1 + o(1)$, $x \to 0$,

3.1.2. *Более точные формулы,*

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x), \quad x \to 0,$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2), \quad x \to 0,$$

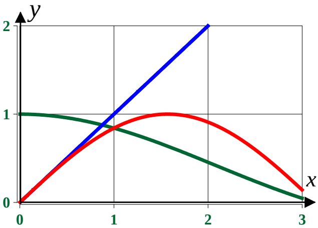
$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x), \quad x \to 0,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x), \quad x \to 0,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2), \quad x \to 0,$$

3.1.3. *Теорема и доказательство*

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.



$$f(x)=\sin x, \quad g(x)=x, \quad h(x)=\frac{\sin x}{x}.$$

□ Пусть $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

1) $0<\sin x<x$, поэтому $\frac{\sin x}{x}<1$.

2) $0 < x < \operatorname{tg} x$, поэтому $x < \dfrac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow$

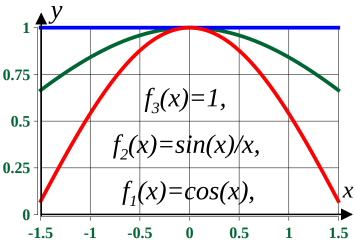
$\cos x < \dfrac{\sin x}{x}$.

Таким образом, $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$,

$\lim\limits_{x\to 0} \cos x \le \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \le \lim\limits_{x\to 0} 1$,

(теорема о трех милиционерах),

$1 \le \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \le 1$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. ■



Замечание 1. Используя теорему о пределе частного, получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

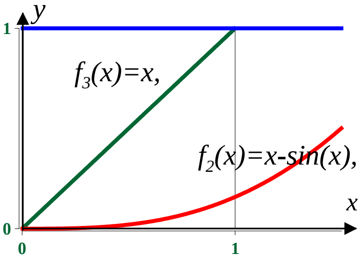
3.1.4. *Асимптотическая формула* $\sin x = x + o(x)$

Замечание 2. Это означает также, что

$\dfrac{\sin x}{x}=1+o(1)$ при $x\to 0$, или

$\sin x = x + x \cdot o(1)$ при $x \to 0$, или

$\sin x = x + o(x)$ при $x \to 0$.



3.1.5. *Асимптотическая формула* $\cos x = 1 + o(1), \quad x \to 0$

следует из равенства $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$,

$\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$

3.1.6. Асимптотическая формула $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

(и даже $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$)

при $x \to 0$ следует из равенства

$$\frac{\cos x - \cos 0}{x^2} = \frac{-2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{-\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2},$$

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}\left(1 + o(1)\right)^2 = -\frac{1}{2} + o(1),$$

$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + x^2 o(1),$$

$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Равносильное определение,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

3.1.7. *Асимптотическая формула* $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$

(и даже $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$)

□ Известно, что $2\sin x\cos x = \sin 2x$.

Пусть $\sin x = x + \alpha x^2 + \beta x^3 + o(x^3)$.

Подставим уже известное,

$$2\left(x + \alpha x^2 + \beta x^3 + o(x^3)\right)\ \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)$$

$$= \left(2x + 4\alpha x^2 + 8\beta x^3 + o(x^3)\right),$$

$$2x + 2\alpha x^2 + 2\beta x^3 + o(x^3) - x^3$$

$$= 2x + 4\alpha x^2 + 8\beta x^3 + o(x^3),$$

1) порядка x^2, $\alpha = 0$,

2) порядка x^3,

$$2\beta x^3 + o(x^3) - x^3 = 8\beta x^3 + o(x^3),$$

$$2\beta - 1 = 8\beta,\ \beta = -\frac{1}{6},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).\ \blacksquare$$

3.1.8. *Асимптотическая формула* $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

(и даже $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$).

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

$$= x\frac{1 - \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}.$$

Так как $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + o(t)$,

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=$$

$$=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)+o\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right),$$

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

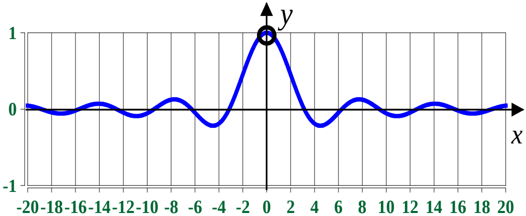
$$\operatorname{tg} x=x\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right),$$

$$\operatorname{tg} x=x\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right),$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

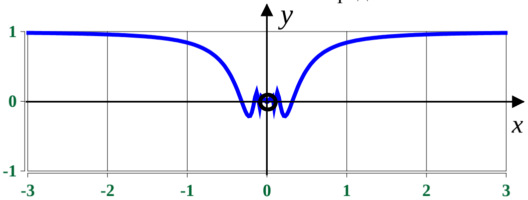
Важный пример. Нарисуем график

$y = \dfrac{\sin x}{x}$. Заметим, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$



Важный пример. Нарисуем график

$y = x \sin \dfrac{1}{x}$. Заметим, что $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin \dfrac{1}{x} = 1$



3.1.9. *Вычисление пределов типа* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}.$$

Пример 2а. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-2\sin 2x+\sin 3x}{x^3}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(\sin 2x-\sin x)+(\sin 3x-\sin 2x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}2\sin\frac{x}{2}\frac{\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\frac{\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{-2\sin\frac{x}{2}\sin 2x}{\frac{x}{2}\cdot 2x}=-2\,.$$

Пример 2б:

$$\frac{\sin x - 2\sin 2x + \sin 3x}{x^3} =$$

$$\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 2\left(2x - \frac{8x^3}{6}\right) + 3x - \frac{27x^3}{6}}{x^3}$$

$$= \frac{-x^3 + o(x^3) - 2\left(-8x^3\right) - 27x^3}{6x^3}$$

$$= -2 + o(1)\,.$$

Заметим, что использовали

(1) $o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) = o\left(x^3\right)$,

(2) $\dfrac{o\left(x^3\right)}{x^3} = o\left(1\right)$.

Позже мы разработаем более эффективные методы вычисления таких пределов.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-2\cos 2x+\cos 3x}{x^2}=-1.$$

Самостоятельно.

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-2\sin a+\sin(a-x)}{x^2}$$

$$=-\sin a.$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+x)-2\cos a+\cos(a-x)}{x^2}$$

$$=-\cos a,$$

и вообще

Пример 6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-2f(a)+f(a-x)}{x^2}=f''(a).$$

Кстати,

Пример 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}=f'(a)$.

Поэтому

Пример 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(1+x)-\mathrm{tg}(1)}{x}=\dfrac{1}{\cos^2(1)}$

Пример 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-[1-\frac{25x^2}{2}+\overbrace{o(5x^2)}^{o(x^2)}]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[12+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=12.$$

Пример 10. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}$.

(1а) первая попытка: $\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}$

$$=\frac{x+o(x)-[x+o(x)]}{x^3}=\frac{o(x)}{x^3}=\frac{o(1)}{x^2}.$$

Дальнейшее продвижение невозможно.
(1б) вторая попытка:

$$\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - [x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)]}{x^3}$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2} + o(1).$$

(3) другой способ:

$$\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}=\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}$$

$$=\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\substack{\downarrow\\1}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\substack{\downarrow\\1}}\cdot\underbrace{\frac{1-x^2/2+o(x^2)-1}{x^2}}_{\substack{\downarrow\\-1/2}}\to-\frac{1}{2}.$$

3.2. Предел монотонной ограниченной функции.

3.2.1. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности

Определение 1. Последовательностью называется функция, определенная на множестве натуральных чисел, x_n, $n \in \mathrm{N}$.

Замечание. Множество натуральных чисел имеет единственную предельную точку $+\infty$, поэтому выражение $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ корректно. Напомним, что предел функции можно искать только при условии, что переменная предела стремится к значению, которое является предельной точкой области определения функции.

Пример 1. $x_n = \dfrac{n-1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$.

Пример 2. $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right)$,

$b > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{b}$.

Определение 2. Говорят, что

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N$

верно $\left|x_n - b\right| < \varepsilon$.

Пример 3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-3}{2n+1} = 1$. $\left|\frac{2n-3}{2n+1} - 1\right| < \varepsilon$,

$\left|\frac{2n-3-2n-1}{2n+1}\right| < \varepsilon$, $\left|\frac{4}{2n+1}\right| < \varepsilon$,

$\frac{4}{2n+1} < \varepsilon$, $\frac{4}{\varepsilon} < 2n+1$, $n > \frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$,

$N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$. ■

Определение 3. Число b не является пределом x_n при $n \to +\infty$, если $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \ \exists n > N : |x_n - b| \geq \varepsilon$.

Определение 4. Последовательность x_n не имеет предела при $n \to +\infty$, если $\forall b \ \exists \varepsilon > 0 : \forall N \ \exists n > N : |x_n - b| \geq \varepsilon$.

Пример 4. Неверно, что $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}$.

Пример 5. Неверно, что

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-3}{2n+1}=0,999$. Докажем:

$$\left|\frac{2n-3}{2n+1}-0,999\right|\geq\varepsilon,$$

$$\left|\frac{2n-3-2n+0,002n-1+0,001}{2n+1}\right|\geq\varepsilon,$$

$$\left|\frac{-3,999+0,002n}{2n+1}\right|\geq\varepsilon,$$

$$-3,999+0,002n\geq 2n\varepsilon+\varepsilon,$$

$$(0,002-2\varepsilon)n\geq 3,999+\varepsilon,$$

$n \ge \dfrac{3,999+\varepsilon}{0,002-2\varepsilon}$, и поэтому при

$\varepsilon = \dfrac{0,001}{2}$ можно взять $n \ge \dfrac{3,999}{0,001}+\dfrac{1}{2}$,

годится любое $n \ge 4001$. ■

Пример 6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2-3n+1}{n^2+1}=2$.

Теорема 1. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b_1$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b_2$, то $b_1 = b_2$ (последовательность не может иметь два различных предела).

□ Докажите самостоятельно, пользуясь тем же приемом, который был использован для функций. ■

Теорема 2. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = c$, то

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n + y_n\right) = b + c$,

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n - y_n\right) = b - c$,

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n y_n\right) = bc$,

(4) Если $c \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{b}{c}$.

Теорема 3. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел, т.е.
(1) Если $\forall n \;\; x_{n+1} \geq x_n$ и $\exists A : \forall n$ верно $x_n \leq A$, то $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup\limits_n x_n$.

(неубывающая, возрастающая).

(2) Если $\forall n \ x_{n+1} \le x_n$ и $\exists A : \forall n \ \ x_n \ge A$, то $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \inf\limits_n x_n$.

(невозрастающая, убывающая).

Доказательство. (1) $\{x_n\}$ ограничено сверху, поэтому существует $M = \sup\limits_n x_n$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = M = \sup\limits_n x_n$. Заметим, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : M - \varepsilon < x_N \le M$.

Поэтому $\forall n > N$ верно $M - \varepsilon < x_n \le M$.

■

Лемма (неравенство Бернулли). $\forall$ натурального n и $\forall x > -1$ верно $(1+x)^n \ge 1 + nx$, причём при $n > 1$ знак равенства имеет место только для $x=0$ □ (доказать самостоятельно по индукции). ■

1) $(1+x)^2=1+2x+x^2\geq 1+2x$.

2) Пусть $(1+x)^n\geq 1+nx$.

3) $(1+x)^{n+1}=(1+x)^n\left(1+x\right)\geq$

$\geq\left(1+nx\right)\left(1+x\right)=1+\left(n+1\right)x+nx^2$

$\geq 1+\left(n+1\right)x$. ■

Графическая иллюстрация:

$f_1(x)=(1+x)^n$, $f_2(x)=1+nx$.

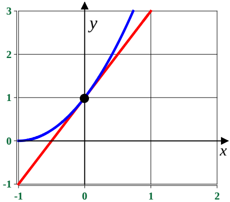


Рис. 1, $n = 2$

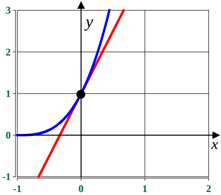


Рис. 2, $n = 3$

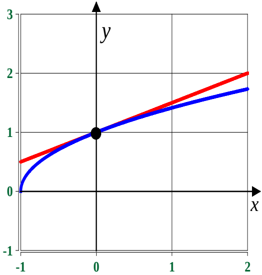


Рис. 3, $n = \dfrac{1}{2}$

Теорема 4. Последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$ возрастает и ограничена.

□ Используя неравенство Бернулли,

получим $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$=\left(\frac{1+\dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$=\left(1-\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{x}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}$$

$$>\left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right)\frac{n+1}{n}=1.$$

Итак, $\forall n \quad \dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, то есть $x_{n+1} > x_n$.

Следовательно, $\{x_n\}$ -возрастающая последовательность.

(3) Рассмотрим последовательность

$$y_n = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Отметим, что $y_n > x_n$.

Составим отношение $\dfrac{y_{n-1}}{y_n}$, применим неравенство Бернулли и получим (аналогично тому, как было получено для последовательности $\{x_n\}$), что

$\forall n \Rightarrow y_n > y_{n+1} > y_n$, то есть

$\{y_n\}$ – убывающая последовательность.

Используя неравенства $\begin{cases} x_{n+1} > x_n \\ y_n > x_n \\ y_n < y_{n-1} \end{cases}$, приходим к цепочке неравенств: $\forall n$ верно $2 = x_1 < x_2 < \ldots$

$\ldots < x_n < y_n < y_{n-1} < \ldots < y_1 = 4$.

Следовательно, последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – монотонные и ограниченные. Поэтому обе они сходятся, причём из равенства $y_n = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

Обозначим этот предел буквой e,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$ (по определению).

Докажите сами, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Можно показать, что $e = 2,71828...$

3.2.2. Монотонные функции.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется

1) возрастающей на X, если

$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$ верно $f(x_1) < f(x_2)$.

2) убывающей X, если $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$ верно $f(x_1) > f(x_2)$.

3) невозрастающей, если $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$ верно $f(x_1) \geq f(x_2)$.

4) неубывающей на X, если $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$ верно $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Функции 1) – 4) называются монотонными на X, функции 1) – 2) называются строго монотонными на X.

Примеры:

1) $f(x) = x^2$ – возрастающая на $[0,+\infty]$.

2) $f(x)$ =[x], целая часть x, – неубывающая на $(-\infty,+\infty)$.

Теорема 1. Если $f(x)$ определена, ограничена и не убывает на интервале $x \in (a,b)$, то

(1) $\exists \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$,

(2) $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$,

(3) $\forall c : (a,b) \ \exists \lim\limits_{x \to c-0} f(x), \ \exists \lim\limits_{x \to c+0} f(x)$,

причем $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) \le \lim\limits_{x \to c+0} f(x)$.

□ Так как $f(x)$ ограничена на (a,b), то существует $M = \sup\limits_{(a;b)} f(x)$. Докажем, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \sup\limits_{(a,b)} f(x)$.

Заметим, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{x} \in (a;b) : M - \varepsilon < f(\tilde{x}) \le M$.

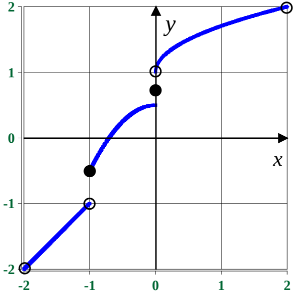
Поэтому

$\forall x \in \left(\tilde{x}, b\right)$ верно $M - \varepsilon < f(x) \le M$. ■

Заметим, что может быть так, что

$\lim\limits_{x \to c-0} f(x) \ne \lim\limits_{x \to c+0} f(x)$.

Пример.



3.2.3. *Теорема о пределе монотонной ограниченной функции.*

Теорема 1. (1) Если $f(x)$ определена, ограничена и монотонна на интервале $(a,+\infty)$, то $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(2) Если $f(x)\nearrow$, то

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup_{(a,+\infty)} f(x).$$

(3) Если $f(x)\searrow$, то

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf_{(a,+\infty)} f(x).$$

Пример 1. $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x$.

Доказательство аналогично.

3.3. Второй замечательный предел.

3.3.1. Формула, выражающая второй замечательный предел. Число e.

М06-2012-09-28

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e=2,718...$

☐ Пусть $x>1$, тогда

$[x]\le x<[x]+1,$

$\dfrac{1}{[x]+1}<\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{[x]},$

$$1+\frac{1}{[x]+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{[x]},$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\le\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{x},$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\le\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\le\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$\le\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

$$e \le \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le e. \blacksquare$$

Другие обозначения,

$$n=[x]\le x<[x]+1=n+1,$$

$$\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{x}<\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n},$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^x,$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{[x]}\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{[x]+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

$$\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$\le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \le \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$\le \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

3.3.2. Второй замечательный предел (альтернативная формулировка)

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Заметим, что из главной теоремы следует также, что $\lim\limits_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$,

$\lim\limits_{x\to+0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{x\to+0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$,

$\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=e^{-1}$.

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to-0}(1+x)^{1/x}$.

Положим $y=-x$. Тогда $y\to+0$, если $x\to-0$,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{\frac{-1}{y}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{1/y} =$$

$$\left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{1/y}.$$

Положим $\frac{y}{1-y} = z$. Тогда $z \to +0$, если $y \to +0$ и $y = \frac{z}{1+z}$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{z} + 1$. Таким образом,

$$(1+x)^{1/x} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{1/y} = (1+z)^{1/z+1}.$$

Если $x \to -0$, то $z \to +0$, поэтому

$$(1+z)^{1/z+1}=\underbrace{(1+z)^{1/z}}_{\substack{\downarrow\\ e\\ \text{(в силу (1))}}}\underbrace{1+z}_{\substack{\downarrow\\ 1}}\to e.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to -0}(1+x)^{1/x}=e.$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$

3.3.3. *Вычисление пределов*

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\alpha x\right)^{\frac{\beta}{x}}.$$

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{5}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 15}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+3x\right)^{\frac{1}{3x}}\right)^{15}$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{3x}}\right)^{15}=e^{15}.$$

h4-2012-10-01-начало

Напомним, что здесь применена ранее сформулированная теорема о том, что

$$\lim_{t\to T} f\left(g(t)\right)=f\left(\lim_{t\to T} g(t)\right).$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x}=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+3t\right)^{\frac{1}{3t}\cdot 15}$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\left(1+3t\right)^{\frac{1}{3t}}\right)^{15}$$

$$= \left(\lim_{t\to 0}\left(1+3t\right)^{\frac{1}{3t}}\right)^{15} = e^{15}.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}\cdot \sin x\cdot \frac{1}{x}}.$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0, t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=(e)^1=e.$$

Пример 4. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}3x)^{\operatorname{ctg}2x}$.

□ $$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}3x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}3x}\operatorname{tg}3x\operatorname{ctg}2x}$$

$$=\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}2x}}=(e)^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

3.3.4. *Асимптотическая формула* $\ln(1+x)=o(1)$.

Теорема 1. $\ln(1+x)=x+o(x)$, $x\to 0$.

□ Нужно доказать, что

$\ln(1+x)-x=o(x)$,

или $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}=0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)-1=\ln e-1$$

$$=1-1=0\ \blacksquare$$

Теорема 2 (пока без доказательства).

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\text{ при }x\to 0.$$

Пример 1. Найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}.$$

□ (1) $\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2} = \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2} =$

$\dfrac{-x^2+o(x^2)}{x^2} = -1$.

□ (2) $\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2} =$

$\dfrac{x-\dfrac{x^2}{2}-x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} =$

$\dfrac{-x^2+o(x^2)}{x^2} = -1+o(1)$.

3.3.5. *Асимптотическая формула* $e^x = 1+x+o(x)$.

Теорема 3. $e^x = 1+x+o(x)$ при $x \to 0$.

□ $\ln(1+x) = x + o(x)$, поэтому

$x = \ln(1+x) + o(x)$,

$$e^x = e^{\ln(1+x)+o(x)} = e^{\ln(1+x)} \cdot e^{o(x)}$$

$$= (1+x)\cdot(e^0 + o(x))$$

$$= (1+x)\cdot\bigl(1+o(x)\bigr) = 1 + x + o(x). \ \blacksquare$$

Теорема 4 (пока без доказательства).

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \text{ при } x \to 0.$$

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x+o(x))-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x} = 1.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x+o(x))-(1+x+o(x))}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+o(x)}{x}=2.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-2e^{2x}+e^{x}}{x^2}$.

$$\frac{e^{3x}-2e^{2x}+e^{x}}{x^2}=\frac{\left[1+3x+\dfrac{(3x)^2}{2}+o(x^2)\right]}{x^2}$$

$$-\frac{2\left[1+2x+\dfrac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right]}{x^2}+$$

$$\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}$$

$$\frac{3x+\frac{9x^2}{2}+o(x^2)-4x-\frac{8x^2}{2}+o(x^2)+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}$$

$$\frac{\frac{9x^2}{2}-\frac{8x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} =$$

$$\frac{2x^2+o(x^2)}{2x^2}=1.$$

Пример 4. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$\square$ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{1/x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\left(\cos x-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\left(\cos x-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}}$$

$$=\left[\lim_{x\to0}\left(1+\left(\cos x-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}$$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$, так как

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+o\left[x^2\right]-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

■

Пример 5. Найдем $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\ln(1+x)\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\ln(1+x)\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\ln(1+x)\right)^{\frac{1}{\ln(1+x)}\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\ln(1+x)\right)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}=e\,.$$

3.3.6. *Еще примеры*

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a[(1+x)^{1/x}]$

$=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$, так как $(1+x)^{1/x}\to e$ при x $\to 0$.

Отсюда следует, что

$\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$ при $x \to 0$.

Поэтому $\log_a(1+x)$ - $\dfrac{x}{\ln a}$ = $o(x)$ при $x\to 0$,

то есть $\log_a(1+x) = \dfrac{x}{\ln a} + o(x)$ при $x\to 0$.

В частности, если $a = e$, то получаем $\ln(1+x) = x + o(x)$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$. Обозначим $a^x - 1 = y$.

Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$, $x=\log_a(1+x)$.

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\log_a(1+y)^{1/y}} \underset{y\to 0}{\longrightarrow}$$

$\dfrac{1}{\log_a e} = \ln a$, так как $(1 + y)^{1/y} \to e$ при $y \to 0$. Итак, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$. Отсюда следует, что $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ при $x \to 0$.

Поэтому $a^x = 1 + x \cdot \ln a + o(x)$ при $x \to 0$, в частности, $e^x = 1 + x + o(x)$.

$$\ln(1 + x) = o(1), \ \ x \to 0,$$

$$e^x = 1 + o(1), \ \ x \to 0,$$

$$\arcsin x = o(1), \ \ x \to 0,$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} + o(1), \ \ x \to 0,$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x^2), \ \ x \to 0,$$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x^2), \quad x \to 0,$$

$$\sin x = x + 0 \cdot x^2 + o(x^2), \quad x \to 0,$$

$$\sin x = x + 0 \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3 + o(x^4), \quad x \to 0,$$

$$\arcsin x = x + o(x^2), \quad x \to 0,$$