4. ЛЕКЦИЯ 4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ. 3

Лекция 4. Непрерывные функции и обратная функция.

4.1. Непрерывные функции одной переменной.

4.1.1. Непрерывность функции в точке.

Замечание 1. Для того, чтобы можно было исследовать существование предела функции $f(x)$ при $x \to a$, достаточно потребовать, чтобы точка $x = a$

была предельной точкой области определения X функции $f(x)$, т.е.

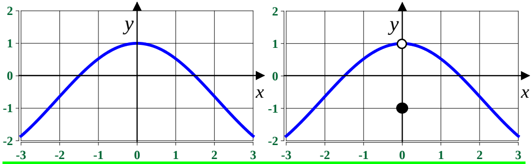
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : 0 < |x - a| < \varepsilon .$$

Замечание 2. Предельная точка множества может как принадлежать данному множеству, так и может не принадлежать этому множеству.

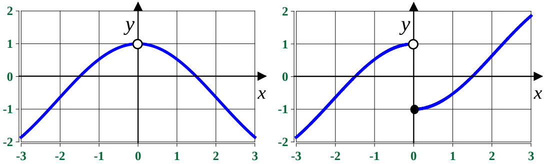
Замечание 3. Иногда мы будем требовать более жесткого условия, предполагая, что $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$. Ни одно из определений или теорем при этом не изменится.

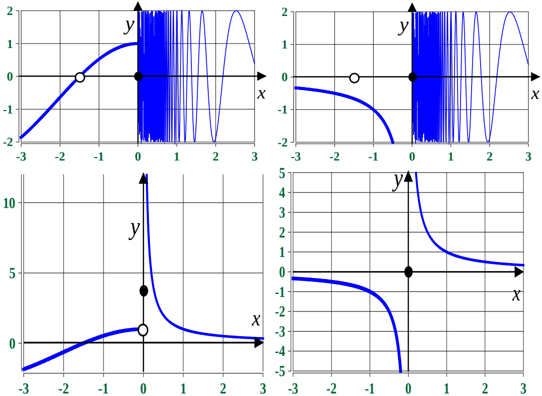
Определение 1. Пусть точка $x = a$ является предельной точкой области определения X функции $f(x)$ и $a \in X$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.



(а) непрерывная (б) разрывная в точке $x = 0$





Определение 2. Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке X.

Замечание 4. Это определение можно применять только в случае, когда каждая точка множества X является его предельной точкой. Такое множество называется плотным в себе. Интервал (a,b), а также сегмент $[a,b]$ являются примерами множеств, плотных в себе. Множество всех рациональных чисел сегмента $[a,b]$ обладает тем же свойством. Множество всех иррациональных чисел сегмента $[a,b]$ обладает тем же свойством.

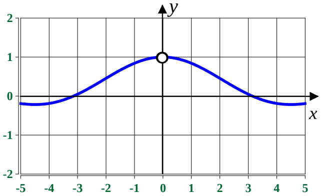
Определение 3. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если x_0 является предельной точкой области определения X функции $f(x)$, но

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует или

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Замечание 5. Точка x_0 может не принадлежать X.

Пример 1. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Не является непрерывной в точке $x = 0$, так как не определена в этой точке.



4.1.2. Точки разрыва, устранимые

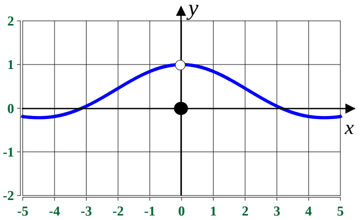
Определение 1. Точка разрыва $x = a$ функции $f(x)$ называется устранимой точкой разрыва, если $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ и

1) или значение $f(a)$ не определено,

2) или $f(a)$ существует, но $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Пример 1. См. предыдущий рисунок.

Пример 2. Пусть $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

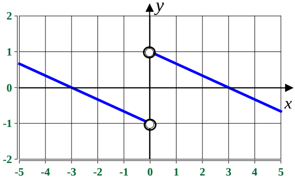


4.1.3. Точки разрыва первого рода.

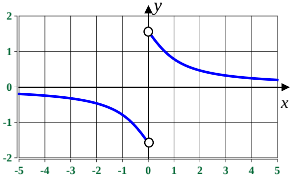
Определение 1. Точка разрыва $x = a$ функции $f(x)$ называется точкой разрыва первого рода, если $\exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$, $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2$, и $b_1 \neq b_2$.

Замечание. В этом случае $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не существует.

Пример 1. $f(x)=\frac{|x|}{x}-\frac{x}{3}$. Не является непрерывной в точке $x=0$, так как $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-1$.



Пример 2. $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x}$,



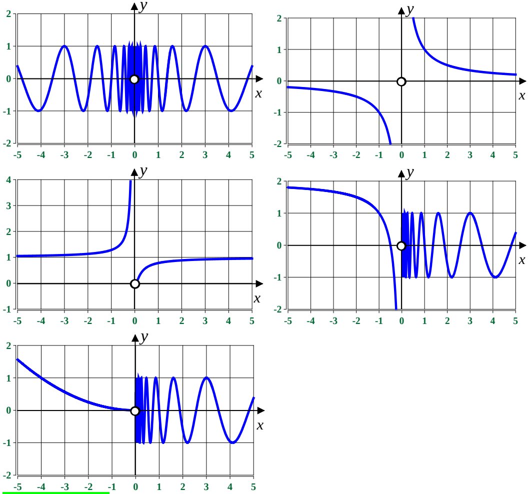
4.1.4. Точки разрыва второго рода.

Определение 1. Точка разрыва $x = a$ функции $f(x)$ называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не существует.

Предполагается, что точка $x = a$ является предельной точкой каждого из двух множеств $X \bigcap (a, +\infty)$ и $X \bigcap (-\infty, a)$, где X есть область определения функции $f(x)$.

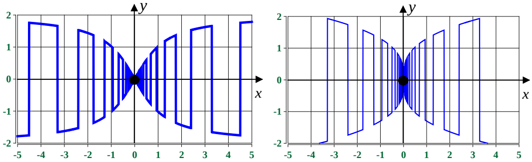
Пример 1. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Не является непрерывной в точке $x = 0$, так как $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода, так как $\nexists \lim\limits_{x\to -0} f(x)$ и $\nexists \lim\limits_{x\to +0} f(x)$.

Примеры функций, имеющих точки разрыва второго рода.



Пример функции, непрерывной в точке.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}\cdot\operatorname{sign}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$



4.1.5. Односторонняя непрерывность

Определение 1а. Функция $f(x)$, определенная в правой полуокрестности точки $x=a$, называется непрерывной в точке $x=a$ справа, если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$.

Определение 1б. Пусть $x = a$ является предельной точкой множества $X \bigcap (a, +\infty)$. функции $f(x)$. Функция $f(x)$, называется непрерывной в точке $x = a$ справа, если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$.

Определение 2. Функция $f(x)$, определенная в левой полуокрестности точки $x = a$, называется непрерывной в точке $x = a$ слева, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$.

Определение 2б. Самостоятельно.

Замечание. Для того, чтобы можно было исследовать предел функции $f(x)$ при $x \to a$, достаточно потребовать, чтобы точка $x = a$ была предельной точкой

области определения функции $f(x)$.
Аналогичное расширение определения можно дать и для одностороннего предела.
Теорема 1. Если $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$ слева и непрерывна в той же точке справа, то она непрерывна в точке $x=a$. ◘ Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a)$.
Пусть $\varepsilon>0$. Тогда $\exists\delta_1>0$:
$\forall x\in X\bigcap(a-\delta_1,a)$ верно
$\left|f(x)-f(a)\right|<\varepsilon$, $\exists\delta_2>0$:

А.А.Быков boombook.narod.ru, boombook@yandex.ru

$\forall x \in X \bigcap (a, a+\delta_2)$ верно

$\left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon$.

Пусть $\delta = \min\left(\delta_1, \delta_2\right)$. Тогда

$\forall x \in X \bigcap (a-\delta, a+\delta)$ верно

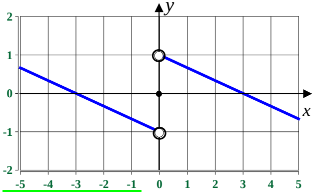
$\left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon$, поэтому

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, так что $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$. ■

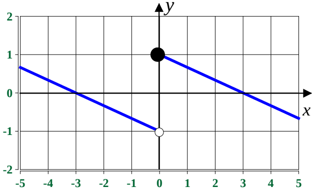
Теорема 2. Если $f(x)$ определена в некоторой $\Omega(a)$ и непрерывна в точке $x = a$, то эта функция непрерывна в этой точке слева и непрерывна в той же точке справа.

Докажите самостоятельно.

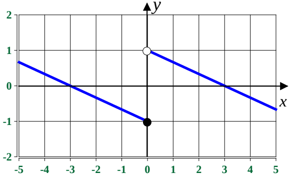
Пример 1. Функция, которая в точке $x = 0$ не является непрерывной справа и не является непрерывной слева.



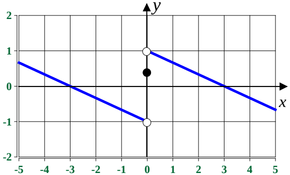
Пример 2. Функция, которая в точке $x = 0$ является непрерывной справа и не является непрерывной слева.



Пример 3. Функция, которая в точке $x = 0$ не является непрерывной справа и является непрерывной слева.



Пример 4. Функция, которая в точке $x = 0$ не является непрерывной справа и не является непрерывной слева.



4.1.6. Арифметические операции над непрерывными функциями.

Теорема 1. Если $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой $\Omega(a)$ и непрерывны в точке $x=a$, то

1) $f(x)+g(x)$,
2) $f(x)-g(x)$,
3) $f(x)\cdot g(x)$ непрерывны в точке $x=a$.
4) Если к тому же $g(a)\neq 0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке $x=a$.

Замечание. В этой и во всех последующих теоремах можно отказаться от требования $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой $\Omega(a)$. Достаточно предположить, что точка $x = a$ является предельной для пересечения областей определения двух указанных функций.

4.1.7. Элементарные функции.

Все элементарные функции

непрерывны во всех точках своей области определения. Функции, определенные на отрезке, непрерывны на концах, соответственно слева (на правом конце) и справа (на левом конце). Укажем множества непрерывности:

Степенные функции

1) $f(x) = x^n,\ n > 0,\ x \in (-\infty, +\infty).$

2) $f(x) = x^{-n},\ n > 0,\ x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty).$

3) $f(x) = x^{m/n},\ n > 0,\ x \geq 0.$

4) $f(x) = x^{\alpha},\ \alpha \neq 0,\ x \geq 0.$

5) $f(x) = \sqrt[m]{x}$ при нечетном m,
$x \in (-\infty, +\infty)$.

6) $f(x) = \sqrt[m]{x}$ при четном m,
$x \in [0, +\infty)$.

Тригонометрические

1) $y = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Ранее мы доказали непрерывность функции $\sin x$ в точке $x = 0$,
$\lim\limits_{x\to 0}\sin x = \sin 0 = 0$.

☐ Докажем непрерывность $\sin x$ в произвольной точке a. Для этого нужно доказать, что $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$, или что $\sin x - \sin a \to 0$ при $x \to a$. Воспользуемся формулой

$$\sin x - \sin a = 2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}.$$

Если $x \to a$, то $\frac{x-a}{2} \to 0$, поэтому

$\sin\dfrac{x-a}{2}\to 0$, а так как $2\cos\dfrac{x+a}{2}$ – ограниченная функция, то
$\sin x - \sin a \to 0$. ■

Рассмотрим теперь функцию

$y=\underbrace{\sin x}_{f(x)}$, $X=[-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}]$.

На этом сегменте функция $y=\sin x$ является непрерывной и возрастающей, возрастание следует из формулы

$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cos\frac{x_2 + x_1}{2}.$$

Следовательно, множеством значений данной функции является сегмент

Y=[sin($-\frac{\pi}{2}$),sin($\frac{\pi}{2}$)]=[-1,1],

На множестве Y= [-1;1] существует обратная функция x=arcsin y, возрастающая и непрерывная на [-1,1].

2) $y = \cos x$ и $x = \arccos y$ - доказать непрерывность самостоятельно

(рассмотреть $y = \cos x$ на $[0, \pi]$).

3) $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Во всех точках области определения $\operatorname{tg} x$ является непрерывной функцией как частное двух непрерывных функций. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на

$[-\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta]$, $\delta > 0$.

На этом сегменте функция $y = \operatorname{tg} x$ – непрерывная и возрастающая, возрастание следует из формулы

$$\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{tg} x_2 = \frac{\sin\left(x_2 - x_1\right)}{\cos x_1 \cos x_2}.$$

Следовательно, множеством значений данной функции является сегмент

$Y = [\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{2} + \delta), \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \delta)]$, на Y существует обратная функция $x = \operatorname{arctg} y$, возрастающая и непрерывная.

Заметим теперь, $\forall y\ \exists\delta > 0$, такое, что

$$y \in [\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{2} + \delta), \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \delta)].$$

Так как $\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{2} + \delta) \to -\infty$ при $\delta \to +0$,

$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \delta) \to +\infty$ при $\delta \to +0$, то функция,

$x = \mathrm{arctg}\, y$ определена для всех

$y \in (-\infty, +\infty)$, является возрастающей и непрерывной.

4) $y = \mathrm{ctg}\, x$ и $x = \mathrm{arcctg}\, y$ - доказать непрерывность самостоятельно.

Степенная с рациональным показателем

Функция $y = x^n$, n - натуральное, $x \in (-\infty, +\infty)$, непрерывна в любой точке, как произведение n непрерывных функций. Рассмотрим теперь $y = x^n$ на $X = [0, a]$, $a > 0$. На этом сегменте $y = x^n$ – непрерывная и возрастающая. Следовательно, множеством значений данной функции является сегмент Y=$[0, a^n]$, на Y существует обратная функция x= $y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}$, возрастающая и непрерывная.

Так как $\forall\, y > 0\ \exists\, a > 0$ такое, что $y \in [0, a^n]$, то функция $x = \sqrt[n]{y}$ определена, возрастает и непрерывна на $[0,+\infty)$.

Положим по определению $x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$ $\forall x>0$, любого натурального n и любого целого m. Тем самым определена функция $y = x^{\frac{m}{n}}$ для рациональных показателей $\alpha = \dfrac{m}{n}$.

Показательная

$y = a^x$, $a>0$, $a\neq1$. Для рациональных x эта функция определена. Отметим, что для рациональных показателей степени $r = \dfrac{m}{n}$ функция a^r обладает следующими свойствами:

1) если $r_1 > r_2$, то

   $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $a > 1$,

   $a^{r_2} > a^{r_1}$ при $0 < a < 1$.

2) $a^{r_1}\, a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$.

3) $\left(a^{r_1}\right)^{r_2} = a^{r_1 r_2}$.

4) $a^0 = 1$ (по определению).

5) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$ (по определению).

6) $a^r\, b^r = (ab)^r$.

7) $a^r > 0\ \forall\ r$.

Определим теперь a^x любого вещественного числа x. Пусть x – любое вещественное число. Рассмотрим случай $a>1$. Рассмотрим множество $\{a^r\}$, где r - любое рациональное число такое, что $r \le x$. Это множество ограниченно сверху, и следовательно, имеет точную верхнюю грань. Положим по определению:

$$a^x = \sup_{\left[\substack{r - рац. \\ r \le x}\right]} \{a^r\}$$

Можно было определить a^x так:

$$a^x = \inf_{\left[\substack{R - рац. \\ R \ge x}\right]} \{a^R\}$$

Осталось доказать, что

$$\sup_{\left[\begin{smallmatrix} r-\text{рац.} \\ r\le x \end{smallmatrix}\right]} \{ a^r \} = \inf_{\left[\begin{smallmatrix} R-\text{рац.} \\ R\ge x \end{smallmatrix}\right]} \{ a^R \}.$$

Если $0 < a < 1$, то $\dfrac{1}{a} > 1$. Положим

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

Можно показать, что функция $f(x) = a^x$ для любых вещественных x обладает такими же свойствами, как и для рациональных показателей степени. В частности, $f(x) = a^x$-возрастающая функция при $a > 1$ и $f(x) = a^x$ убывающая функция при $0 < a < 1$. Докажем непре-

рывность $f(x)=a^x$ для любого вещественного x. Для определённости рассмотрим случай $a > 1$, возьмём произвольное $x=c$ и докажем непрерывность a^x в точке $x=c$ слева. Для этого нужно доказать, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ левая полуокрестность точки c, в которой $a^c - a^x < \varepsilon$.
По определению,

$$a^c = \sup_{\left[\begin{smallmatrix} r-рац. \\ r\le c \end{smallmatrix}\right]} \{a^r\}.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим число $a^c - \varepsilon$. По определению точной верхней грани, найдется рациональное число

$\tilde{r} < c : a^{\tilde{r}} > a^c$ - ε.

Так как a^x - возрастающая функция, то
$\forall\, x \in \{\tilde{r} < x \le c\}$: $a^x > a^{\tilde{r}} > a^c - \varepsilon$,
откуда $a^c - a^x < \varepsilon$ при $\tilde{r} \le x \le c$.
Непрерывность a^x в точке c слева доказана. Аналогично доказывается непрерывность a^x в точке с справа. Из непрерывности в точке c слева и справа следует непрерывность a^x в точке c.
Рассмотрим теперь функцию $y = a^x$ на произвольном сегменте $[b; c]$. На этом сегменте эта функция строго монотонная и непрерывная. Следовательно, множеством значений данной функции является сегмент $Y = [a^c, a^b]$.
На Y существует обратная функция $x = \log_a y$.

Так как $\forall y > 0\ \exists\ b$ и c такие, что $y \in [a^c,\ a^b]$, то функция $x = \log_a y$, сторого монотонная и непрерывная на полупрямой $(0, +\infty)$.

Если $a = e$, то логарифм называется натуральным и обозначается $\log_e x = \ln x$, показательная функция e^x называется экспонентой.

Степенная функция с произвольным вещественным показателем.

$y = x^\alpha$, α - любое вещественное число.

Область определения $X = \{x > 0\}$.

Так как $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = e^t$, где $t = \alpha \ln x$, то $y = x^\alpha$ непрерывна в любой точке $x > 0$ как

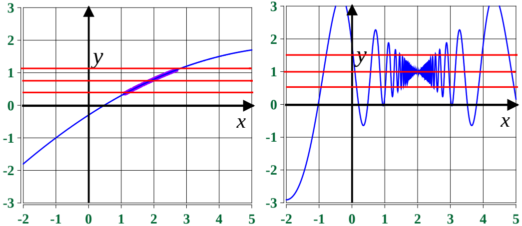
суперпозиция двух непрерывных функций.
Рассмотренные элементарные функции называются основными элементарными функциями.
Любая функция, которая получается из основных элементарных функций в результате конечного числа арифметических операций и суперпозиций - называется элементарной функцией, а множество всех элементарных функций называется классом элементарных функций.
Из теоремы о непрерывности сложной функции и теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями следует, что любая элементарная

функция непрерывна во всякой точке, в окрестности которой она определена. Например , $y = (\sin x)^{\ln \operatorname{tg} x}$. непрерывна во всех точках x, в которых $\sin x > 0$ и $\operatorname{tg} x > 0$.

4.1.8. Устойчивость знака непрерывной функции

4.1.9. m07-2012-10-02

Теорема 1. Если $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ и $f(a) > 0$, то $\exists \delta > 0 : \forall x \in X : |x - a| < \delta$ верно $f(x) > 0$.



$\square$ Пусть $\varepsilon = \dfrac{f(a)}{2} > 0$. Тогда

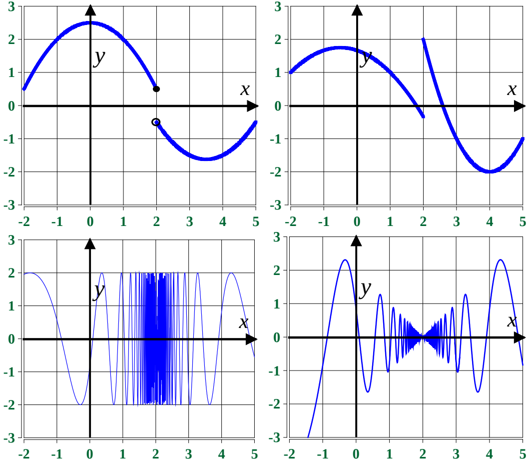
$\exists \delta > 0 : \forall x \in X : |x - a| < \delta$ верно

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. При том же условии

$|f(x) - f(a)| < \dfrac{f(a)}{2}$,

$\dfrac{f(a)}{2} < f(x) < \dfrac{3f(a)}{2}$, поэтому на указанном множестве $f(x) > 0$. $\blacksquare$

4.1.10. Корни непрерывной функции



Теорема 1. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)\cdot f(b)<0$, то $\exists c\in(a,b):\ f(c)=0$.

□ Пусть $f(a)<0$ и $f(b)>0$. В силу теоремы об устойчивости знака непрерывной функции, найдётся такая правая полуокрестность точки $x=a$, в которой $f(x)<0$. Рассмотрим множество X всех таких точек $\tilde{x}\in[a,b]$, что $f(x)<0$ на $[a,\tilde{x})$. Это множество непустое, ограниченное сверху (например, точкой $x=b$) и, следовательно, имеет точную верхнюю грань, которую обозначим $c=\sup \mathrm{X}$. Отметим, что $\forall x<c$ верно

$f(x)<0$. Докажем, что $f(c)=0$. Допустим, что это не так.

1) Предположим, что $f(c)>0$. Тогда $f(x)>0$ в некоторой окрестности точки $x=c$, и, следовательно, $\exists x<c: f(x)>0$, что противоречит условию $c=\sup \mathrm{X}$.

2) Предположим, что $f(c)<0$. Тогда $f(x)<0$ в некоторой окрестности точки $x=c$, это противоречит тому, что $c=\sup \mathrm{X}$. Значит, $f(c)=0$. ■

4.1.11. *Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение*

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$, $B\neq A$. Тогда $\forall C\in(A,B)$ $\exists c\in(a,b)$: $f(c)=C$.

□ Рассмотрим функцию $g(x)=f(x)-C$. Пусть, для определённости, $A<C<B$. Тогда $g(a)=f(a)-C=A-C<0$, $g(b)=f(b)-C=B-C>0$. Кроме того, $g(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Следовательно, $\exists c \in (a,b): g(c) = 0$, то есть $f(c) - C = 0$, $f(c) = C$. ■

4.1.12. Метод вилки приближенного вычисления корней уравнений

Теорема 1. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то $\exists c \in (a,b): f(c) = 0$.

□ Пусть для определённости $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Рисунок нарисовать. Пусть

$$p_1 = a,\ q_1 = b,\ r_1 = \frac{p_1 + q_1}{2},$$

1) $f(r_1) < 0 \Rightarrow\ p_2 = r_1,\ q_2 = q_1,$

2) $f(r_1) > 0 \Rightarrow \quad p_2 = p_1,\ q_2 = r_1,$

3) $f(r_1) = 0 \Rightarrow \quad c = r_1$ (корень найден).

При повторении процесса деления пополам получим две монотонные ограниченные последовательности,

$\{p_n\} : p_{n+1} \geq p_n,\ \ f(p_n) < 0,$

$\{q_n\} : q_{n+1} \leq q_n,\ \ f(q_n) > 0,$

$q_n - p_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}} \to 0$. Поэтому

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} p_n = \exists \lim\limits_{n\to\infty} q_n = c$, причем $\begin{cases} f(c) \leq 0, \\ f(c) \geq 0. \end{cases}$

Поэтому $f(c) = 0$. ■

4.2. Сложная функция.

4.2.1. Понятие сложной функции.

Определение 1. Если функция $x = g(t)$ определена на множестве T, множество значений этой функции на T совпадает с множеством X, функция $f(x)$ определена на множестве X, то говорят, что на множестве T определена сложная функция $f\left(g\left(t\right)\right)$ (композиция двух функций).

Замечание. В этом определении могут быть использованы другие буквы для обозначения переменных, например, $t = g(x)$, $f(t)$, $f(g(x))$.

Пример 1. функция $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ является композицией функций $t=\sqrt{1-x^2}$ и $f(t)=\arcsin t$.

Пример 2. функция $f(t)=\ln\dfrac{1+t}{1-t}$ является композицией функций $x=\dfrac{1+t}{1-t}$ и $f(x)=\ln x$.

Область определения найдите самостоятельно.

4.2.2. *Теорема о непрерывности сложной функции.*

Теорема 1. Если функция $t=g(x)$ определена в некоторой $\Omega(a)$ и непрерывна в точке $x = a$, $c = g(a)$, функция $y = f(t)$ определена в некоторой $\Omega(c)$ непрерывна в точке $t = c$, то сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке $x = a$.

□ Из непрерывности $f(t)$ в точке $t = c$ следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \forall t : 0 < |t - c| < \delta_1$ верно $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Пусть теперь $\varepsilon = \delta_1$. Из непрерывности $g(x)$ в точке $x = a$ следует, что $\exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta$ верно $|g(x) - g(a)| < \delta_1$. Поэтому

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta$ верно $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$. ■

4.2.3. *Асимптотический анализ сложной функции.*

Пример 1. Пусть

$f(x) = 3x - x^2,\ \ g(x) = x + x^2,$

$f(g(x)) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$. Найдем a, b, c, d. Пусть

$f(t) = 3t - t^2,\ \ f(g(x)) = 3g(x) - (g(x))^2,$

$f(g(x)) = 3x + 3x^2 - \left(x + x^2\right)^2,$

$f(g(x)) = 3x + 3x^2 - x^2 - 2x^3 - x^4,$

$f(g(x)) = 3x + 2x^2 - 2x^3 + o(x^3).$

Пример 2. Пусть $f(x) = x - px^3$,

$g(x) = x + qx^3$,

$f(g(x)) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$ при

$x \to 0$. Найдем a, b, c, d.

$$f(g(x)) = g(x) - p\left(g(x)\right)^3,$$

$$f(g(x)) = g(x) - p\left(x + qx^3\right)^3.$$

$$f(g(x)) = g(x) - p\left(x^3 + 3x^2qx^3 + 3xq^2x^6 + q^3\right.$$

$$f(g(x)) = x + qx^3 - p\left(x^3 + o\left(x^3\right)\right)^3,$$

$$f(g(x)) = x + (p - q)x^3 + o\left(x^3\right).$$

4.3. Обратная функция.

4.3.1. Понятие обратной функции.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X и ее множество значений на X совпадает со множеством Y. Пусть к тому же $\forall y \in Y$ уравнение $y = f(x)$ имеет единственный корень $x \in X$. Тогда говорят, что на множестве Y определена функция $x = g(y)$, обратная по отношению к функции $y = f(x)$. Значение этой функции в точке $y \in Y$ равно единственному корню уравнения $y = f(x)$.

Пример 1.

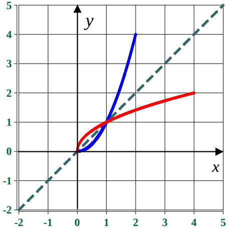
(a) $y = x^2$, $X_f = [0;2]$, $Y_f = [0;4]$,

(b) $x = \sqrt{y}$, $x \in [0;2]$, $y \in [0;4]$.

(c) $x \Leftrightarrow y$, $X \Leftrightarrow Y$,

(d) $y = \sqrt{x}$, $x \in X_g = [0;4]$,

$y \in Y_g = [0;2]$,



Пример 2. (a) $y = x^2$, $X_f = [-2;0]$,

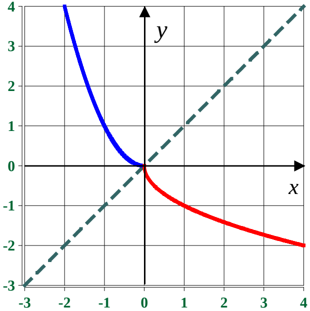
$Y_f = [0;4]$,

(b) $x=-\sqrt{y}$, $x\in[-2;0]$, $y\in[0;4]$.

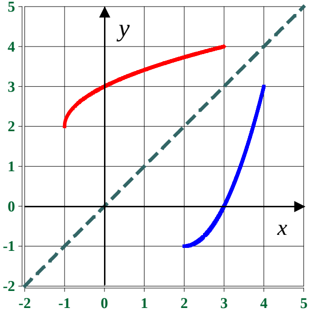
(c) $x \Leftrightarrow y$, $X \Leftrightarrow Y$,

(d) $y=-\sqrt{x}$, $x\in X_g=[0;4]$,

$y\in Y_g=[-2;0]$,



Пример 3. (a) $y = x^2 - 4x + 3$, $X_f = [2;4]$, $Y_f = [-1;3]$, (b) $x^2 - 4x + 3 - y = 0$, $(x-2)^2 = y+1$, $x = 2 + \sqrt{y+1}$, $x \in [2;4]$, $y \in [-1;3]$. (c) $x \Leftrightarrow y$, $X \Leftrightarrow Y$, (d) $y = 2 + \sqrt{x+1}$, $x \in X_g = [-1;3]$, $y \in Y_g = [2;4]$,


y
x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Пример 4. (а) $y = x^2 - 4x + 3$, $X_f = [0;2]$, $Y_f = [-1;3]$,

4.3.2. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ определена, непрерывна и возрастает на сегменте $X = [a, b]$, то

1) ее множество значений совпадает с сегментом $Y = [c, d] = [f(a), f(b)]$, и

2) на сегменте $Y = [c, d]$ определена функция $x = g(y)$, обратная по отношению к функции $f(x)$, причем $g(y)$ воз-

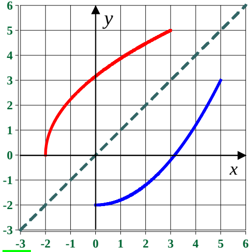
растает и непрерывна на сегменте $[c,d]$, и к тому же

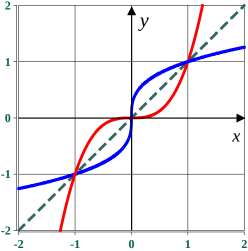
3) $\forall x \in [a,b]$ верно равенство

$g\left(f(x)\right) = x,$

4) $\forall y \in [c,d]$ верно равенство

$f\left(g(y)\right) = y.$





■ Пусть $y = f(x)$ возрастает на $\left[a,b\right]$.

Функция $y = f(x)$ принимает любое значение между $f(a)$ и $f(b)$, а так как $y = f(x)$ – возрастающая функция, то у неё нет значений, меньших $f(a)$, и значений, больших $f(b)$. Тем самым, множество её значений

$Y = [c, d] = [f(a), f(b)]$.

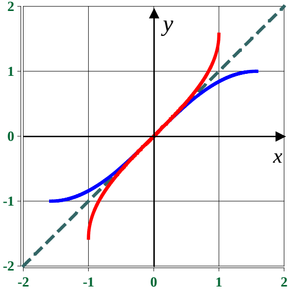
Так как $y = f(x)$ – возрастающая функция, то каждое значение $y \in Y$ функция принимает только в одной точке. Отсюда следует, что на сегменте Y существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$.

Докажем, что $x = f^{-1}(y)$ возрастает на сегменте Y. Возьмём y_1 и $y_2 \in Y$, $y_1 < y_2$

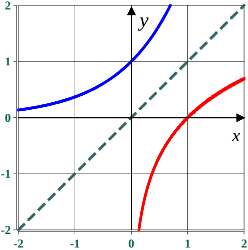
Требуется доказать, что $\underbrace{f^{-1}(y_1)}_{x_1}$ $< \underbrace{f^{-1}(y_2)}_{x_2}$, то есть, что $x_1 < x_2$. От противного: так как $f\left(x_1\right) = y_1$ и $f\left(x_2\right) = y_2$, то если $x_1 \geq x_2$, то в силу возрастания функции $f(x)$ получим $f\left(x_1\right) \geq f\left(x_2\right)$, то есть $y_1 \geq y_2$, что противоречит неравенству $y_1 < y_2$. Таким образом, $f^{-1}\left(y_1\right) \geq f^{-1}\left(y_2\right)$, то есть обратная функция возрастает на сегменте Y. Остаётся доказать непрерывность обратной функции на сегменте Y. Возьмём произвольную точку

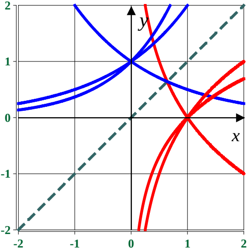
$y_0 \in \left(f(a), f(b) \right)$ и докажем непрерывность обратной функции в точке y_0. По определению непрерывности, нужно доказать, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $| f^{-1}(y)$-$f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$ при $|y$- $y_0|<\delta$, или $| f^{-1}(y)$-$x_0|<\varepsilon$ при $|y$- $y_0|<\delta$. Иначе говоря, нужно доказать, что значения обратной функции лежат в ε–окрестности точки x_0 для значений аргумента y из δ-окрестности точки y_0. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы $x_0 - \varepsilon \in [a, b]$ и $x_0 + \varepsilon \in [a, b]$. Пусть $f\left(x_0 - \varepsilon\right) = y_1$ и $f\left(x_0 + \varepsilon\right) = y_2$. Так как функция $y = f(x)$ – возрастающая, то $y_1 < y_0 < y_2$. А так как обратная функция $x = f^{-1}(y)$ также возрастающая, то $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$, или $x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$ при $y_1 < y < y_2$, то есть значения обратной функции лежат в ε–окрестности точки x_0 для значений аргумента $y \in (y_1, y_2)$. Возьмём любую δ–окрестность точки y_0, принадлежащую интервалу (y_1, y_2). Тогда, согласно доказанному, значения обратной функции для значений аргумента y из этой δ-окрестности лежат в ε-окрестности точки x_0. ■

4.3.3. Непрерывность обратных тригонометрических функций.



4.3.4. Непрерывность показательной и логарифмической функции.





4.3.5. Асимптотический анализ обратной функции.

Пусть $f(x) = 3x - x^3$, $g(x) = f^{-1}(x)$,

$g(x) = bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$, $x \to 0$.

Найдем b, c, d.

$$f(g(x)) = 3g(x) - (g(x))^3,$$

$$f(g(x)) = 3\left(bx + cx^2 + dx^3\right)$$

$$-\left(bx + cx^2 + dx^3\right)^3 + o(x^3),$$

$$f(g(x)) = 3bx + 3cx^2 + 3dx^3 - b^3x^3 + o(x^3),$$

$f(g(x)) = x,$ поэтому

(1) $3b = 1,\ b = \dfrac{1}{3},$

(2) $3cx^2 = 0,\ c = 0,$

(3) $3dx^3 - b^3x^3 = 0,\ d = \dfrac{b^3}{3} = \dfrac{1}{3^4}.$