Лекция 7. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

7. Лекция 7. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях. 1
7.1. h-2012-10-29-№7-Теоремы о непрерывных функцях 3
7.1.1. Локальная ограниченность непрерывной функции 3
7.1.2. Первая теорема Вейерштрасса.. 4
7.1.3. Вторая теорема Вейерштрасса.. 7
7.2. Теоремы о дифференцируемых функциях 10
7.2.1. Возрастание и убывание функции в точке 10
7.2.2. Локальный максимум 17
7.2.3. Теоремы Ролля и Лагранжа.....19

7.2.4. h-2012-11-12-№8 Применение Лагранжа 23
7.2.5. M-2012-11-30-№20 Применение Лагранжа 24
7.3. Монотонность и экстремум 26
7.3.1. Необходимое и достаточное условие монотонности..........................26
7.3.2. Достаточные условия локального экстремума 32
7.3.3. Примеры 34
7.4. Решение нелинейных уравнений 44
7.4.1. Решение нелинейных уравнений в кино 44
7.4.2. Метод простой итерации..........45
7.4.3. Метод касательных 46

7.1. h-2012-10-29-№7-Теоремы о непрерывных функцях

7.1.1. Локальная ограниченность непрерывной функции

Теорема 1. (о достаточных условиях локальной ограниченности непрерывной функции). Если $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, то существует окрестность точки a, в которой $f(x)$ ограничена.

□ Зададим $\varepsilon > 0$. По определению непрерывности, $\exists \delta > 0 : \forall x : |x - a| < \delta$ верно

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, или

$$m = f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon = M$$

в δ – окрестности точки a. Это и означает, что $f(x)$ ограничена в некоторой δ – окрестности точки $x = a$. ■

Замечание 1. Функция имеющая предел в точке, локально ограничена в окрестности этой точки.

Замечание 2. Функция имеющая предел при $x \to +\infty$, ограничена в некоторой окрестности $+\infty$, т.е. $\exists A, \exists B : \forall x > A$ верно $\left|f(x)\right| \le B$.

7.1.2. *Первая теорема Вейерштрасса*

Замечание. Пусть $f(x)$ непрерывна на промежутке X (то есть непрерывна в каждой точке X). Тогда по теореме 1, $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности каждой точки X. Следует ли из этого, что $f(x)$ ограничена на X? Ответ отрицательный.

Пример. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке интервала $0<x<1$, но не является ограниченной на этом интервале.

Теорема 2 (первая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на сегменте функция ограничена на этом сегменте.

□ От противного. Допустим, $f(x)$ не ограничена сверху на сегменте $[a,b]$, то есть $\forall A\ \exists x\in[a,b]: f(x)>A$. Пусть $A_n=n$ и $x_n: f(x_n)>A_n=n$. Последовательность $x_n\in[a,b]$ ограничена, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to c$. Так как $x_{n_k} \in [a,b]$, то $c \in [a,b]$. Так как $f(x)$ непрерывна в точке c, то $f(x_{n_k}) \to f(c)$. С другой стороны, $f(x_{n_k}) > n_k \geq n$, последовательность $f(x_{n_k})$ бесконечно большая, расходится. Противоречие доказывает, что предположение неверно, так что $f(x)$ ограничена на $[a,b]$. ■

Вопрос: В каком месте не пройдет доказательство теоремы 2, если рассматривать интервал, а не сегмент?.

Опр1. Пусть $f(x)$ ограничена на множестве X. Тогда она имеет на этом множестве точные грани, $\sup\limits_X f(x) = M$, $\inf\limits_X f(x) = m$.

Если $\exists x_1 \in X : f(x_1) = M$, то говорят, что функция достигает на X своей точной верхней грани. Если $\exists x_2 \in X : f(x_2) = m$, то говорят, что функция достигает на X своей точной нижней грани.

Пример. $f(x) = x$, $X = (0;1]$. Тогда $\sup\limits_{(0;1]} f(x) = 1$, $\inf\limits_{(0;1]} f(x) = 0$, но $f(x)$ не достигает своей точной нижней грани.

7.1.3. *Вторая теорема Вейерштрасса*

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда по теореме 2 она ограничена на этом сегменте и, следовательно, имеет точные грани, $\sup\limits_X f(x) = M$, $\inf\limits_X f(x) = m$.

Теорема 3 (вторая теорема Вейерштрасса) Непрерывная на сегменте функция достигает на этом сегменте своих точных граней.

◻ Проведем доказательство для точной верхней грани. Допустим, что $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a,b]$, не принимает ни в одной точке значения $\sup\limits_{X} f(x) = M$, тогда $\forall x \in [a,b] \;\; f(x) < M$. Пусть $F(x) = \dfrac{1}{M - f(x)} > 0$. Эта функция непрерывна на $[a,b]$. Поэтому $\exists A : \forall x \in [a,b]$ верно $F(x) \le A$, причем $A > 0$. Тогда $\dfrac{1}{M - f(x)} \le A$,

$f(x) \le M - \frac{1}{A}$. Это противоречит тому, что M – наименьшая из верхних граней функции $f(x)$ на $[a,b]$. ■

Замечание 1. Для интервала теорема неверна.
Замечание 2. Если $f(x)$ достигает на множестве X своей точной верхней грани, то она имеет на этом множестве максимальное значение, то есть $\max\limits_X f(x) = \sup\limits_X f(x) = M$.

Ограниченная, но разрывная на сегменте функция может не иметь на этом сегменте минимального и максимального значения.

Пример. $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1, \\ 1, & x=0,\ x=1. \end{cases}$,

$\max\limits_{[0;1]} f(x)=1$, минимального значения нет.

7.2. Теоремы о дифференцируемых функциях

7.2.1. Возрастание и убывание функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена на (a,b) и $c\in(a,b)$.

Опр2. Говорят, что $f(x)$ возрастает в точке c, если $\exists\delta>0$:

$f(x)>f(c)$ при $c<x<c+\delta$,

$f(x) < f(c)$ при $c - \delta < x < c$.

Аналогично определяется убывание функции в точке c.

Теорема 4а (достаточные условия возрастания дифференцируемой функции в точке).

Если $f'(c) > 0$, то $f(x)$ возрастает в точке c.

☐ Так как $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon$$

при $0 < |x - c| < \delta$, поэтому

$$f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(c) + \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{f'(c)}{2}$, $\dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} < \dfrac{3\varepsilon}{2}$,

$\left.\begin{array}{l} f(x) > f(c) \text{ при } x > c \\ f(x) < f(c) \text{ при } x < c \end{array}\right\}$ в δ–окрестности точки c ($x \neq c$). Это и означает, что то $f(x)$ возрастает в точке $x = c$. ■

Пример 1. $f(x) = x^3 + x$ возрастает в каждой точке числовой оси, так как

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ для всех x.

Пример 2а. $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1 + x, & x < 0, \end{cases}$ возрастает в точке $x = 0$, но $f'(0)$ не существует. Эта функция возрастает в любой точке числовой оси.

Пример 2б. $f(x)=\begin{cases}1-x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1-x, & x<0,\end{cases}$ возрастает в точке $x=0$, но $f'(0)$ не существует. Эта функция убывает в любой точке числовой оси, кроме точки $x=0$, в которой $f(x)$ возрастает.

Пример 3. $f(x)=x^3$ возрастает в каждой точке числовой оси, так как $f'(x)=3x^2>0$ для всех $x\neq 0$, а для $x_0=0$ верно $f(x)>f(0)$

при $x > 0$ и $f(x) < f(0)$ при $x < 0$. Отметим, что $f'(0) = 0$.

Пример 4. $f(x) = x + x^2 D(x)$, $D(x)$ функция Дирихле, возрастает в точке $x_0 = 0$, но не является возрастающей или убывающей ни в какой другой точке.

Пример 5. $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$, возрастает в точке $x_0 = 0$, но не является возрастающей или убывающей ни в какой окрестности этой точки.

Пример 6. $f(x)=\begin{cases} 2x+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$, возрастает в точке $x_0=0$, и является возрастающей в некоторой окрестности этой точки.

Замечание. Условие $f'(c)>0$ является достаточным, но не является необходимым условием возрастания функции в точке c.

Пример 1. $f(x)=x^3$ возрастает в точке $x=0$, но $f'(0)=0$.

Теорема 4b (необходимые условия возрастания дифференцируемой функции в точке). Если $f(x)$ возрастает в точке c и $\exists f'(c)$, то $f'(c)\geq 0$.

□ Докажите самостоятельно (методом от противного). ■.

Пример 2. $f(x)=\begin{cases}2x, & x\ge 0,\\ x, & x<0,\end{cases}$ возрастает в точке $x=0$, но $f'(0)$ не существует.

Теорема 4c. (достаточные условия возрастания функции в точке). Если $f'_{правая}(c)>0$ и $f'_{левая}(c)>0$, то $f(x)$ возрастает в точке c.

□ Докажите самостоятельно. ■.

Теорема 4d. (достаточные условия возрастания функции в точке). Если $f'(x)>0$ на множестве $\hat{\Omega}(c)$ и $f(x)$ непрерывна в точке c, то $f(x)$ возрастает в точке c.

□ Докажем после доказательства формулы Лагранжа. ■.

7.2.2. Локальный максимум

Опр.1. В точке $x = c$ функция $f(x)$ имеет *строгий* локальный максимум (минимум), если найдется такая проколотая окрестность точки $x = c$, в которой $f(x) < f(c)$ при $x \neq c$ (соответственно $f(x) > f(c)$).

Теорема 6 (Ферма, необходимое условие экстремума дифференцируемой функции).
Если $f(x)$ имеет в точке $x = c$ локальный экстремум и дифференцируема в точке $x = c$, то $f'(c) = 0$.

□ Пусть в точке $x = c$ функция имеет максимум и $f'(c) > 0$. Тогда $f(x)$ возрастает в точке $x = c$ и, следовательно, существует окрестность точки c, в которой $f(x) > f(c)$ при $x > c$, но это противоречит тому, что в точке c функция имеет локальный максимум. Таким же образом можно показать, что $f'(c) < 0$ не может быть выполнено. ■

Замечание. Условие $f'(x) = 0$ является необходимым, но не является достаточным условием существования локального экстремума дифференцируемой функции.

Пример. $f(x) = x^3$ возрастает в точке $x = 0$, то есть экстремума нет, но при этом $f'(0) = 0$.

7.2.3. Теоремы Ролля и Лагранжа

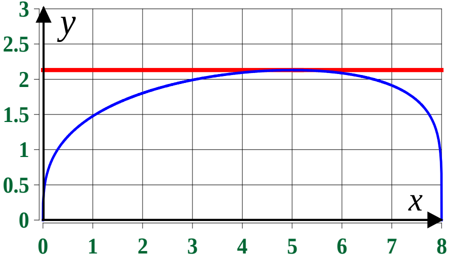
Теорема 7 (Ролля) Пусть

1) $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$,

2) $f(x)$ дифференцируема на (a,b),

3) $f(a) = f(b)$.

Тогда $\exists c \in (a,b): f'(c) = 0$.



□ В силу второй теоремы Вейерштрасса $f(x)$ имеет на сегменте $[a,b]$ максимальное и минимальное значения,

$M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$, $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$

Возможны два случая,

(1) $M=m$, и тогда $f(x)=M=m=\text{const}$.

Тогда ∀ точки $c \in [a,b]$ $f'(c) = 0$

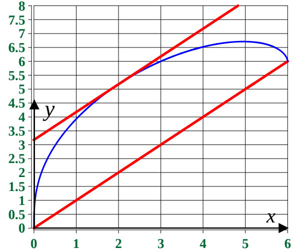
(2) $M > m$. Так как $f(a) = f(b)$, то по крайней мере одно из своих значений (M или m) $f(x)$ принимает во внутренней точке $c \in (a,b)$. По теореме Ферма, $f'(c) = 0$. ■

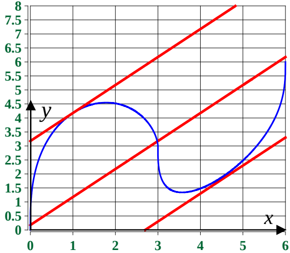
Теорема 8 (Лагранжа) Пусть

(1) $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$,

(2) $f(x)$ дифференцируема на (a,b).

Тогда $\exists c \in (a,b): f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.





□ Функция

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

удовлетворяет на сегменте $[a,b]$ всем условиям теоремы Ролля, $F(a)=F(b)=0$.

По теореме Ролля, $\exists c\in(a,b): F'(c)=0$,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c). \blacksquare$$

Теорема 9. Если $f(x)$ дифференцируема на промежутке X и $\forall x \in X$ верно $f'(x) = 0$, то $f(x) = const$ на X.

$\square$ Пусть $x_0 \in X$, $x \in X$. Применим формулу Лагранжа, $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, поэтому $f(x) = f(x_0)$. $\blacksquare$

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для $f(x)$ на X, то $F_1(x) - F_2(x) = const$ на X.

Было доказано, что $\left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = 0$

$\forall\, x \in X$. Отсюда следует, что

$F_1(x) - F_2(x) = const$ на X.

7.2.4. h-2012-11-12-№8 Применение Лагранжа

Пример 1. $f(x) = \ln x,\ a = 100, b = 110,$

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$

$$= (110 - 100)\frac{1}{c} \in 10 \cdot \left(\frac{1}{110}, \frac{1}{100}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{10}\right).$$

7.2.5. М-2012-11-30-№20 Применение Лагранжа

Пример 2. $f(x)=\ln\left(1+x^2\right),\ a=4,$

$b=5,\ f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

$$=(5-4)\frac{2c}{1+c^2}\in\left(\frac{10}{1+5^2},\frac{8}{1+4^2}\right)$$

$$=\left(\frac{10}{26},\frac{8}{17}\right)=\left(\frac{170}{26\cdot 17},\frac{208}{26\cdot 17}\right).$$

Пример 3. $f(x)=\ln\left(1+x^2\right),\ a=\dfrac{1}{2},$

$b=2,\ f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

$$=\left(2-\frac{1}{2}\right)\frac{2c}{1+c^2},$$

Неверно: $\ldots\in\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}},\dfrac{4}{1+4}\right)=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{4}{5}\right).$

Верно: $\ldots\in\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{4}{5},1\right]=\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{3}{2}\right].$

7.3. Монотонность и экстремум

7.3.1. Необходимое и достаточное условие монотонности

Теорема 10а (необходимое и достаточное условие монотонности дифференцируемой функции). Для того, чтобы дифференцируемая на промежутке X функция $f(x)$ не убывала (не возрастала) на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in X$ было верно $f'(x) \geq 0$ (соответственно $\forall x \in X$ $f'(x) \leq 0$).

□ 1. Достаточность.

Пусть $\forall x \in X \quad f'(x) \geq 0$. Возьмем $x_1 < x_2$, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$. По формуле Лагранжа,

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \geq 0,$$

а это и означает, что $f(x)$ не убывает на промежутке X. ■

□ 2. Необходимость.

Пусть $f(x)$ не убывает на промежутке X, то есть $f(x_2) \geq f(x_1)$ при $x_1 < x_2$.

Докажем, что $\forall x \subset X$ верно $f'(x) \geq 0$.

Допустим, что $\exists c \in X : f'(c) < 0$.

Тогда, по теореме 5, $f(x)$ убывает в точке c и, следовательно, найдется такая окрестность точки c, где $f(x) < f(c)$ при $x > c$, но это противоречит условию $\forall x \subset X \quad f'(x) \geq 0$. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно и, следовательно, $\forall x \subset X \quad f'(x) \geq 0$. ■

Теорема 10б (необходимое условие возрастания дифференцируемой функции). Если дифференцируемая на промежутке X функция возрастает (или даже не убывает) на X, то $\forall x \in X$ верно $f'(x) \geq 0$.

Теорема 10в (достаточное условие возрастания дифференцируемой функции). Если для дифференцируемой на промежутке X функции $\forall x \in X$ верно $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает на X.

Замечание. Из возрастания функции в точке не следует ее возрастание в какой-нибудь окрестности этой точки.

Пример 1. $f(x)=\begin{cases} x+x^2\sin\dfrac{2}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases} 1+2x\sin\dfrac{2}{x}-2\cos\dfrac{2}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}.$$

Данная функция возрастает в точке $x=0$, но не является возрастающей ни в какой окрестности точки $x=0$.

Пример 2. $f(x)=\begin{cases} 2x+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases} 2+2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 2, & x=0. \end{cases}.$$

Данная функция возрастает в точке $x=0$ и является возрастающей на промежутке $x\in(-1;1)$.

Теорема 11. Если $f(x)$ возрастает на интервале (a,b), то она возрастает в каждой точке этого интервала.

□ Пусть $c \in (a,b)$. Рассмотрим окрестность этой точки, принадлежащую (a,b). Если $f(x)$ возрастает на (a,b), то $f(x) > f(c)$ при $x > c$, $f(x) < f(c)$ при $x < c$, а это и означает, что функция $f(x)$ возрастает в точке *c*. ■

Теорема 12. Если $f(x)$ возрастает в каждой точке интервала (a,b), то $f(x)$ возрастает на (a,b).

Доказать самостоятельно.

7.3.2. Достаточные условия локального экстремума

Теорема 1. Если $f'(a)=0$, $f''(a)<0$, то точка $x=a$ является точкой локального максимума функции $f(x)$.

□ $f''(a)<0$, поэтому $f'(x)\searrow$ в точке $x=a$. Поэтому $\exists\delta>0:\forall x\in(a-\delta;a)$ верно $f'(x)>0$, $\forall x\in(a;a+\delta)$ верно $f'(x)<0$,

$x\in(a;a+\delta)\Rightarrow f(x)\searrow$,

$x\in(a-\delta;a)\Rightarrow f(x)\nearrow$,

так что точка $x=a$ является точкой максимума. ■

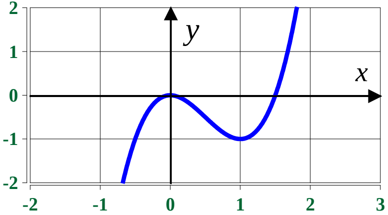
Теорема 2. Если точка a является точкой Ферма функции $f(x)$, т.е. $f'(a)=0$, и кроме того $f'(x) > 0$ на $(a-\delta, a)$, а также $f'(x) < 0$ на $(a, a+\delta)$, то точка $x = a$ является точкой локального максимума функции $f(x)$.

Теорема 3. Если $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, $f'(x) > 0$ на $(a-\delta, a)$, $f'(x) < 0$ на $(a, a+\delta)$, то точка $x = a$ является точкой локального максимума функции $f(x)$.

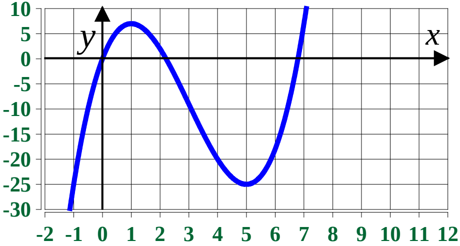
Теорема 4. Если $f'(x)$ меняет знак в точке $x = a$ (и $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$), то точка $x = a$ является точкой локального экстремума функции $f(x)$.

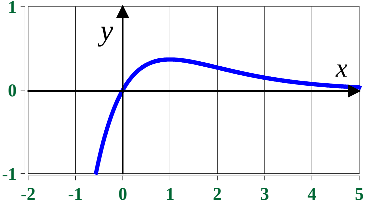
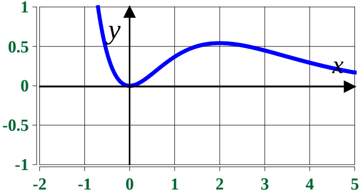
7.3.3. Примеры

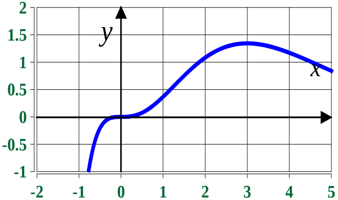
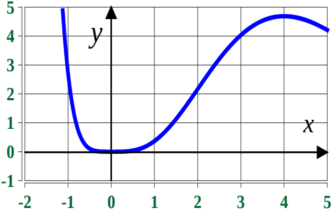
(1) $f(x)=2x^3-3x^2.$

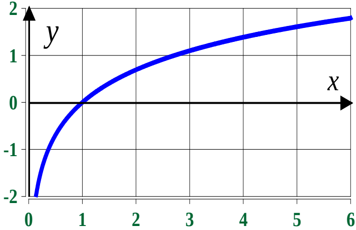
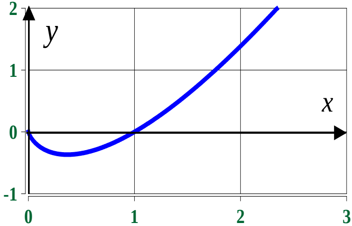


(2) $f(x)=x^3-9x^2+15x.$

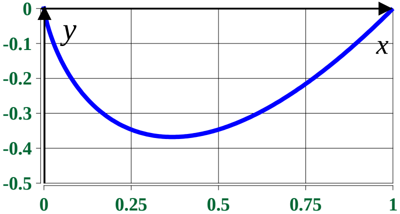


xe^{-x}	1 0 -1 y x -2 -1 0 1 2 3 4 5
x^2e^{-x}	1 0.5 0 -0.5 -1 y x -2 -1 0 1 2 3 4 5

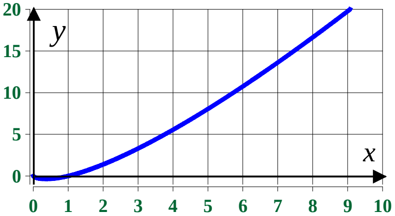
x^3e^{-x}	y x 2 1.5 1 0.5 0 -0.5 -1 -2 -1 0 1 2 3 4 5
x^4e^{-x}	y x 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -1 0 1 2 3 4 5

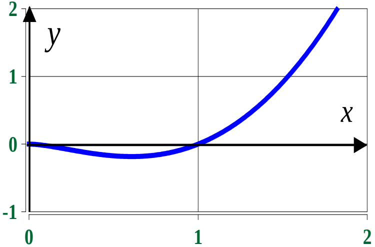
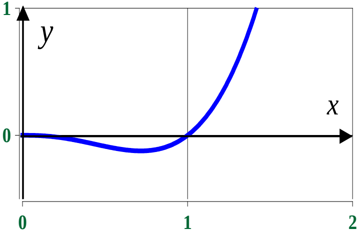
$\ln x$	 2 1 0 -1 -2 y x 0 1 2 3 4 5 6
$x\ln x$	 2 1 0 -1 y x 0 1 2 3

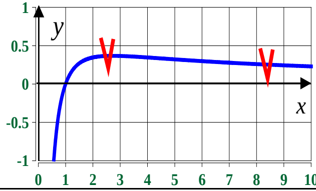
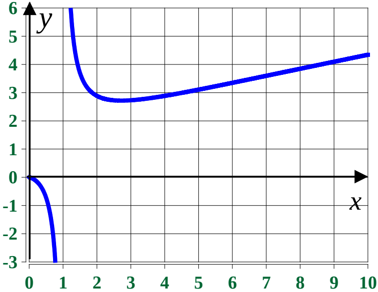
$$f(x) = x \ln x$$

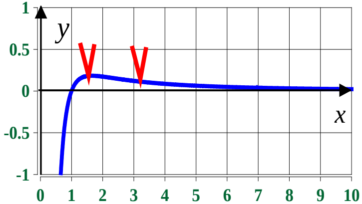
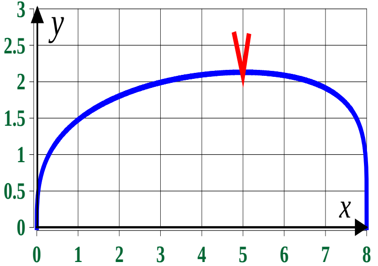


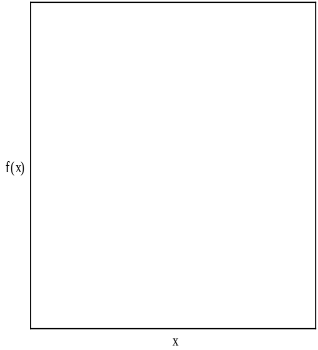
$$f(x) = x \ln x$$

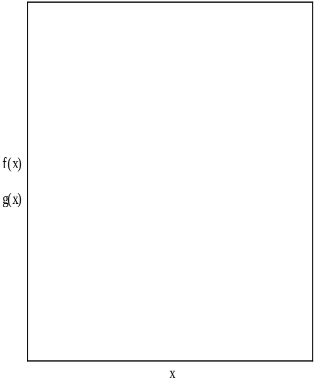


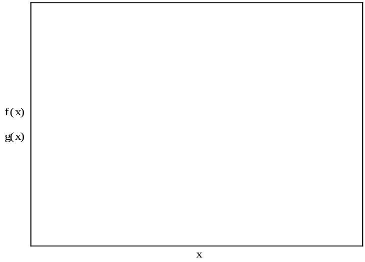
$x^2 \ln x$	
$x^3 \ln x$	

$\dfrac{\ln x}{x}$	
$\dfrac{x}{\ln x}$, $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$	

$\dfrac{\ln x}{x^2}$	
$\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{8-x}$	

$\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{8-x}$	$f(x) := \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{8-x}$ 

$\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{(3-x)^2}$	$f(x) := \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{(3-x)^2}$ $\quad g(x) := x-2$  $\lim (f(x) - x) \rightarrow$

$\sqrt[6]{x^4(6-x)^2}$	$f(x) := \sqrt[6]{x^4\cdot(6-x)^2}$ $g(x) := \lvert x-2 \rvert$  $\lim (f(x)-x) \rightarrow$

7.4. Решение нелинейных уравнений

7.4.1. Решение нелинейных уравнений в кино

See Двадцать одно-а-14’30”.

7.4.2. *Метод простой итерации*

Теорема 1. Пусть $X=\Omega_\delta(a)=(a-\delta;a+\delta)$,

1) уравнение $x=f(x)$ на X имеет единственный корень $x=c$,

2) $f(x)$ дифференцируема на X,

3) $|f'(x)|\le q<1$ на X,

4) $x_{n+1}=f(x_n)$, $x_0\in X$.

Тогда $\forall n\ge 1\Rightarrow x_n\in X$ и $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

□ 1) $x_{n+1}=f(x_n)$, $c=f(c)$,

$x_{n+1}-c=f(x_n)-c=f(x_n)-f(c)$

$= (x_n - c) f'(\xi)$, но $|f'(\xi)| \le q$,

$|x_{n+1} - c| \le q |x_n - c|$

2) $|x_{n+1} - c| \le q^n |x_1 - c| \to 0$. ■

7.4.3. *Метод касательных*

Теорема 2. Пусть

1) $f(x)$ дважды дифференцируема на $(a;b)$, непрерывна на $[a;b]$,

2) $f(a) < 0$, $f(b) > 0$,

3) $f'(x) \ge q > 0$ на $(a;b)$, $f''(x) > 0$ на $(a;b)$,

4) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_0 = b$.

Тогда 1) уравнение $x = f(x)$ на $X = [a;b]$ имеет единственный корень $x = c$,

$\forall n \geq 1 \Rightarrow x_n \in X$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.