Лекция 10. Числовые последовательности.

10.1. Числовые последовательности

10.1.1. Основные понятия.

Определение 1а. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана последовательность x_1, x_2, …, x_n,…

Последовательность обозначают x_n.

Определение 1b. Последовательность есть функция, заданная на множестве натуральных чисел.

Замечание 1. Окрестность “точки” $+\infty$ есть любой промежуток вида $(R,+\infty)$.

Замечание 2. Множество натуральных чисел N имеет единственную предельную точку $+\infty$. Это означает, что в любой окрестности “точки” $+\infty$ вида $(R,+\infty)$ найдется по крайней мере одно натуральное число, и ни в какой окрестности точки $y \in R$ не содержится бесконечно много натуральных чисел.

10.1.2. *Ограниченные и неограниченные последовательности.*

Определение 2. Последовательность x_n называется ограниченной, если $\exists M : \forall n \ |x_n| \le M$.

Пример. $x_n = (-1)^n$ – ограниченная, годится $M = 1$.

Определение 3. Последовательность x_n называется ограниченной сверху, если
$\exists M : \forall n \ x_n \le M$.

Пример. $x_n = 7 - n$ – ограниченная сверху, годится $M = 6$.

Определение 4. Последовательность x_n называется ограниченной снизу, если
$\exists m : \forall n \ x_n \ge m$.

Пример. $x_n = n-7$ – ограниченная снизу, годится $m=-6$.

Определение 5. Последовательность x_n называется неограниченной, если для

$\forall M\ \exists n: |x_n| > M$.

Пример 1. $x_n = n$ – неограниченная.

Пример 2. $x_n = n(-1)^n$ – неограниченная.

Определение 6. Последовательность x_n называется бесконечно большой, если $\forall A>0\ \exists N$: $\forall n>N$ верно $|x_n| > A$.

Теорема 1. Любая бесконечно большая последовательность является неограниченной.

Замечание. Неограниченная последовательность может не быть бесконечно большой.

Пример 1. $x_n = n(-1)^n$ – неограниченная и одновременно бесконечно большая.

Пример 2. $x_n = n\left(1+(-1)^n\right)$ – неограниченная, но не является бесконечно большой.

10.1.3. *Предел последовательности.*

Определение 1. Число a называется пределом последовательности x_n, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N :\ \forall n > N$ верно $|a - x_n| < \varepsilon$.

В этом случае говорят, что последовательность x_n сходится к a при $n \to +\infty$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to +\infty$.

Пример. Докажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n-3}{2n+1} = 2$.

$\left|\dfrac{4n-3}{2n+1}-2\right|<\varepsilon$, $\left|\dfrac{4n-3-4n-2}{2n+1}\right|<\varepsilon$, $\left|\dfrac{-5}{2n+1}\right|<\varepsilon$,

$\left|\dfrac{5}{2n+1}\right|<\varepsilon$, $\dfrac{5}{2n+1}<\varepsilon$, $2n+1>\dfrac{5}{\varepsilon}$, $2n>\dfrac{5}{\varepsilon}-1$,

$n>\dfrac{5}{2\varepsilon}-\dfrac{1}{2}$. Можно положить $N=\left[\dfrac{5}{2\varepsilon}\right]+1$.

Определение 2. Число a не является пределом последовательности x_n, если $\exists\varepsilon>0:\ \forall N$ $\exists n>N:\ |a-x_n|\geq\varepsilon$.

Пример. Докажите, что утверждение

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n-3}{2n+1}=3$ неверно.

Теорема 1. Если $x_n \to a$, то в любой $\Omega(a)$ содержится бесконечно много членов последовательности x_n.

Теорема 2. Если отбросить (добавить) любое конечное число членов последовательности, то получится новая последовательность, которая сходится (и имеет тот же предел) или расходится вместе с исходной.

Теорема 3. Последовательность не может иметь более одного предела.

☐ Предположим, что последовательность x_n имеет два предела a и b, $a < b$. Пусть $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3} > 0$. Тогда существует такое N, что при всех $n > N$ верно $|a - x_n| < \varepsilon$ и одновременно $|b - x_n| < \varepsilon$. Аналогично докажем, что условие $a > b$ не может быть верным. Полученное противоречие доказывает, что $a = b$. ■

Теорема 4. Если $x_n \to a$, то x_n ограничена.

□ Самостоятельно. ■

Обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

Пример. $x_n = (-1)^n$ не имеет предела, хотя $|x_n| \le 2$.

10.2. Монотонные последовательности.

Определение 1. (1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность называется возрастающей.

(2) $x_{n+1} \geq x_n$ для всех n, неубывающая.

(3) $x_{n+1} < x_n$ для всех n, убывающая.

(4) $x_{n+1} \leq x_n$ для всех n, невозрастающая.

Все эти последовательности называются монотонными. Возрастающие и убывающие последовательности называются также строго монотонными.

Пример 1. $x_n = \dfrac{1}{n}$ – убывающая и ограниченная, Пример 2. $x_n = 2n + (-1)^n$ – неубывающая и неограниченная,

Пример 3. $x_n = n$ – возрастающая и неограниченная.

Следует отметить, что монотонная последовательность ограничена по крайней мере с одной стороны.

Теорема 1. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

□ Рассмотрим монотонную неубывающую последовательность $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$

Пусть x_n ограничена сверху, $x_n \le M$. Любое ограниченное сверху числовое множество имеет точную верхнюю грань, пусть это M'.

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : x_N > M' - \varepsilon$. Поэтому $\forall n > N$ верно $x_n \ge x_N > M' - \varepsilon$, или $M' - \varepsilon < x_n \le M'$. Поэтому $\forall n > N$ верно $|x_n - M'| < \varepsilon$, поэтому $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = M'$. ■

10.3. Теорема о стягивающейся системе сегментов.

Определение 1. Стягивающейся системой сегментов называют последовательность $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ такую, что

1) каждый следующий сегмент содержится в предыдущем, т.е. $\forall n\ a_{n+1} \ge a_n,\ b_{n+1} \le b_n$ и

2) $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. Существует, и притом единственная, точка, принадлежащая всем сегментам стягивающейся системы.

□ 1) Так как a_n – неубывающая последовательность, b_n – невозрастающая, обе эти последовательности ограничены, то a_n и b_n сходятся. Так как $b_n - a_n \to 0$ при $n\to\infty$, то эти последовательности имеют один и тот же предел, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, причем $\forall n \; c \in \left[a_n, b_n\right]$.

2) Докажем, что такая точка только одна. Предположим, существует другая точка $d \in \left[a_n, b_n \right]$ и $d>c$. Тогда $b_n - a_n \geq d - c$, что противоречит условию $b_n - a_n \to 0$. ■

10.3.1. М-2012-11-16-№17

Теорема 2. Если система $\left[a_n, b_n \right]$ стягивается, и $x_n \in \left[a_n, b_n \right]$, то x_n сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

10.4. Предельные точки последовательности.

Опр.1. Пусть x_n числовая последовательность, и пусть n_1, $n_2, \ldots,$ n_k, … – возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $x_{n_k} = x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_j}, \ldots$ называется подпоследовательностью последовательности x_n.

Отметим, что $n_k \geq k$, причем возможно $n_k = k$.

Пример 1. $x_n = (-1)^n$, тогда $x_{2k} = (-1)^{2k} = 1$, $x_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$.

Пример 2. $x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$, тогда

$$x_{2k} = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k} \to e,$$

$$x_{2k+1} = \left(1 + \frac{-1}{2k+1}\right)^{2k+1} \to e^{-1}.$$

Опр.2. Число b называется предельной точкой последовательности x_n, если из последовательности x_n можно выделить подпоследовательность x_{n_k}, сходящуюся к b при $k \to +\infty$.

Опр.3а. Число b называется предельной точкой последовательности x_n, если $\forall \varepsilon > 0$ в ε–

окрестности точки b содержится бесконечно много членов последовательности x_n.

Опр.3б. Число b называется предельной точкой последовательности x_n, если $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$ имеет бесконечно много различных решений n_k.

Замечание. 1) Даже если, например, все $x_n = 1$, то число 1 является предельной точкой последовательности x_n. 2) Множество $X = \{1\}$ не имеет предельных точек.

Опр.4а. $+\infty$ называется предельной точкой x_n, если из x_n можно выделить $x_{n_k} \to +\infty$.

Опр.4б. $-\infty$ называется предельной точкой x_n, если из x_n можно выделить $x_{n_k} \to -\infty$.

Опр.5а. $+\infty$ называется предельной точкой x_n, если $\forall R$.... (допишите самостоятельно).

Теорема 1. Определения 2 и 3 эквивалентны.

◘ 1) Пусть b – предельная точка последовательности x_n по первому определению. Тогда существует подпоследовательность $x_{n_k} \to b$, поэтоме в любой ε–окрестности точки b содержится бесконечно много членов последовательности x_n, это означает, что b является предельной точкой последовательности по второму определению.

□ 2) Пусть b –предельная точка последовательности x_n по второму определению. Построим сходящуюся подпоследовательность.

$\varepsilon_1 = 1$, $|x_{n_1} - b| < \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{2}$, $|x_{n_2} - b| < \varepsilon_2$,

$n_2 > n_1$ гарантирует x_{n_2} не совпадает с x_{n_1}, и т.д. ■

Теорема 2. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, то любая подпоследовательность последовательности x_n сходится к b, т.е. $\forall n_k \ \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = b$.

□ Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, то $\forall \varepsilon > 0$ все члены последовательности с номерами

$n_k > N(\varepsilon)$ лежат в ε–окрестности точки b, это означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = b$.

Замечание. Может случиться так, что последовательность расходится, то есть не имеет предела, но у нее есть сходящаяся подпоследовательность.

Пример 1. $x_n = 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \ldots, 1, \frac{1}{n}, \ldots$

Очевидно, что эта последовательность расходится, но при этом

$x_{2n-1} = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots \to 1,$

$x_{2n} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots \to 0.$

Пример 2. $x_n = (-1)^n$, $\mathrm{B} = \{-1;1\}$.

Пример 3. $x_n = \sin\frac{\pi n}{4}$, $\mathrm{B} = \left\{0; \pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \pm 1\right\}$.

Пример 4. $x_n = \sin\frac{\pi n}{6}$, $\mathrm{B} = \left\{0; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$.

Пример 5. $x_n = \sin n$, $\mathrm{B} = [-1;1]$.

Пример 7. $x_n = f\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$, $f(t)$ означает дробную часть t. $\mathrm{B} = [0;1]$.

Пример 8. $x_n = n$, $\mathrm{B} = \{+\infty\}$.

Пример 9. $x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$, $\mathrm{B} = \left\{e^{\pm 1}\right\}$.

Пример 10. $x_n = 1$, $\mathrm{B} = \{1\}$.

10.5. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Теорема 1а (Б.-В.). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

◻ Пусть x_n ограниченная последовательность, $\forall n \ x_n \in [a,b]$. Разделим сегмент $[a,b]$ пополам. По крайней мере на одной из половин $[a,b]$ лежит бесконечно много членов последовательности x_n, обозначим эту половину $[a_1,b_1]$. Возьмем $x_{n_1} \in [a_1,b_1]$.

Разделим $\left[a_1,b_1\right]$ пополам и обозначим через $\left[a_2,b_2\right]$ ту половину, на которой находится бесконечно много членов последовательности x_n. Выберем $x_{n_2} \in \left[a_2,b_2\right]$, $n_2 > n_1$. Разделим $\left[a_2,b_2\right]$ пополам, и так далее. Получим стягивающуюся систему $\left[a_n,b_n\right]$ (так как $a_{n+1} \geq a_n$, $b_{n+1} \leq b_n$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$). Последовательность $x_{n_k} \in \left[a_k,b_k\right]$ сходится. ■

Замечание 1. Для неограниченных последовательностей теорема Больцано–Вейерштрасса неверна.

Теорема 1б. Ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.

Теорема 2а. Неограниченная последовательность имеет в качестве предельной точки по крайней мере одно из $\pm\infty$.

Теорема 2б. Бесконечно большая положительная последовательность имеет единственную предельную точку $+\infty$.

Теорема 2в. Последовательность $x_n \to -\infty$ единственную предельную точку $-\infty$.

Теорема 3. Любая последовательность имеет по крайне мере одну предельную точку, считая $\pm\infty$.

Теорема 4. Если последовательность имеет ровно одну предельную точку (но не $\pm\infty$), то она сходится.

Теорема 5. Если ограниченная последовательность имеет ровно одну предельную точку, то она сходится.

Теорема 6. Если последовательность имеет ровно одну предельную точку (считая $\pm\infty$), то она или сходится, или бесконечно большая положительная, или бесконечно большая отрицательная.

Теорема 7. Если последовательность имеет не менее двух предельных точек, то она расходится.

Теорема 8. Любая монотонная последовательность имеет ровно одну предельную точку (считая $\pm\infty$).

Теорема 9. Монотонная ограниченная последовательность имеет ровно одну предельную точку, которая совпадает с ее пределом.

Теорема 10. Если последовательность имеет не менее двух предельных точек, то она не является монотонной.

Теорема 11. Из любой неограниченной сверху последовательности можно выделить монотонную бесконечно большую положительную подпоследовательность (которая имеет ровно одну предельную точку $+\infty$).

Пример 1. $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

Из $\{n\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, но можно выбелить монотонную бесконечно большую.

10.6. Верхний и нижний пределы последовательности.

Определение 1. Наибольшая (наименьшая) из предельных точек ограниченной последовательности x_n называется ёе верхним (нижним) пределом и обозначается $\overline{\lim}\, x_n$, $\underline{\lim}\, x_n$.

Определение 2. Для неограниченной сверху x_n полагаем $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$.

Определение 3. Для неограниченной снизу x_n полагаем $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$.

Теорема 1. Если последовательность x_n сходится, то она имеет ровно одну предельную точку (ее предел), и в этом случае

$$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = \lim x_n .$$

Теорема 2. Если ограниченная последовательность имеет конечное число предельных точек, то среди них есть наибольшая и наименьшая, то есть в этом случае последовательность имеет верхний и нижний пределы.
Замечание. Если число предельных точек бесконечно, то существование верхнего и нижнего пределов не является очевидным.

10.6.1. *М-2012-11-23-№18*

Теорема 3. Любая ограниченная последовательность имеет верхний и нижний пределы.
□ Пусть x_n – ограниченная последовательность. Обозначим через B множество всех

предельных точек этой последовательности. Так как это множество ограничено и непустое, то оно имеет точные грани. Обозначим $\overline{\mathrm{B}} = \sup \mathrm{B}$, $\underline{\mathrm{B}} = \inf \mathrm{B}$. Достаточно доказать, что $\overline{\mathrm{B}} \in \mathrm{B}$, $\underline{\mathrm{B}} \in \mathrm{B}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\overline{\mathrm{B}} = \sup \mathrm{B}$, то $\exists b \in \mathrm{B} : \left|\overline{\mathrm{B}} - b\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. (может быть даже, что $b = \overline{\mathrm{B}}$). Так как $b \in \mathrm{B}$, то в $\dfrac{\varepsilon}{2}$-окрестности точки b содержится бесконечно много членов последовательности x_n. Но $\Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}(b) \in \Omega_{\varepsilon}\left(\overline{\mathrm{B}}\right)$, тем самым, в ε–окрестности точки $\overline{\mathrm{B}}$ содержится бесконечно много членов последовательности x_n, а это и означает, что $\overline{\mathrm{B}}$ – предельная точка последовательности x_n, то есть $\overline{\mathrm{B}} \in \mathrm{B}$. ■

Теорема 4. Если последовательность имеет счетное число предельных точек, B_k, причем $B_k \to B$, то B также является предельной точкой.

Теорема 5. Предельная точка множества предельных точек также является предельной точкой.

Пример 1. $x_n = \dfrac{1}{n}$, $\mathrm{B} = \{0\}$, $\overline{\mathrm{B}} = 0$, $\underline{\mathrm{B}} = \inf \mathrm{B} = 0$.

Пример 2. $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $\text{B} = \{-1, 1\}$, $\overline{\text{B}} = 1$, $\underline{\text{B}} = \inf \text{B} = -1$.

Пример 3. $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\text{B} = \{-e, e\}$, $\overline{\text{B}} = e$, $\underline{\text{B}} = \inf \text{B} = -e$.

Пример 4. $x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$, $\text{B} = \{e, e^{-1}\}$, $\overline{\text{B}} = e$, $\underline{\text{B}} = \inf \text{B} = e^{-1}$.

Пример 5. $x_n = \sin \frac{\pi n}{6}$, $\text{B} = \left\{0; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$, $\overline{\text{B}} = 1$, $\underline{\text{B}} = -1$.

Пример 6. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, $\mathrm{B} = \{+\infty\}$,

$\overline{\mathrm{B}} = +\infty$, $\underline{\mathrm{B}} = +\infty$.

Пример 7. $x_n = f\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$, $f(t)$ означает дробную часть t. $\mathrm{B} = [0;1]$,

$\overline{\mathrm{B}} = \sup \mathrm{B} = 1$, $\underline{\mathrm{B}} = \inf \mathrm{B} = -1$.

Пример 8. $x_j = \left\{\frac{m}{n}\right\}, n \in \mathrm{N}, m \in \{1, \ldots, n\}$,

$\mathrm{B} = [0;1]$, $\overline{\mathrm{B}} = 1$, $\underline{\mathrm{B}} = 0$.

10.7. Критерий Коши сходимости последовательности.

Определение 1а. Последовательность x_n называется фундаментальной, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m > N$ верно $\left| x_n - x_m \right| < \varepsilon$.

Определение 1б. Последовательность x_n называется фундаментальной, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N, \forall p > 0$ верно

$\left| x_n - x_{n+p} \right| < \varepsilon$.

Пример 1. $x_n = \dfrac{1}{n}$ фундаментальная.

□ Пусть $\varepsilon > 0$ и $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда $\frac{1}{N} < \varepsilon$, и

$$\forall n > N, \forall p > 0 \quad \left|\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon.$$ ■

Определение 2а. Последовательность x_n не является фундаментальной, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \ \exists n > N, \exists m > N : \ \left|x_n - x_m\right| \geq \varepsilon.$$

Определение 2б. Последовательность x_n не является фундаментальной, если…

Пример 1. $x_n = (-1)^n$ не является фундаментальной.

Пример 2. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ не является фундаментальной.

Лемма. Фундаментальная последовательность ограничена. □ Пусть x_n –фундаментальная последовательность и $\varepsilon = 3$. Тогда $\exists N : \forall m > N$ верно $\left| x_m - x_{N+1} \right| < \varepsilon = 3$, а вне этого интервала лежит только конечное число членов последовательности (не больше чем N штук). Это означает, что x_n ограничена. ■

Теорема 1 (критерий Коши сходимости последовательности). Для того, чтобы числовая последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

□ 1) Необходимость. Пусть x_n сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N : \forall n > N$

верно $\left|x_n - b\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Если $n > N$ и $m > N$, то

$\left|x_n - x_m\right| < \left|x_n - b + b - x_m\right| \le \left|x_n - b\right| + \left|x_m - b\right| \le \varepsilon$.

■

2) Достаточность. Пусть x_n – фундаментальная. Тогда x_n ограничена, и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, $\exists n_k : x_{n_k} \to b$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $x_{n_k} \to b$, то

$\exists K : \forall k > K$ верно $\left|x_{n_k} - b\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Так как x_n фундаментальная, то

$\exists N : \forall n, m > N$ верно $\left|x_n - x_m\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Пусть

$k = \max\{K, N\}$. Тогда $\forall m > N$ $\left|x_{n_k} - x_m\right| < \frac{\varepsilon}{2}$,

так что $\left|x_m - b\right| < \left|x_m - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - b\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Пример. Рассмотрим последовательность $x_n = \sin n$. Докажем, что эта последовательность расходится. Для этого достаточно доказать, что она не является фундаментальной. Предположим, что $x_n = \sin n$ – фундаментальная. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N, \forall p > 0$ верно $\left|\sin n - \sin(n+p)\right| < \varepsilon$.

Возьмем p=2,

$$\left|2\sin\frac{p}{2}\cos\frac{2n+p}{2}\right| < \varepsilon,$$

$\left|2\sin 1\cos(n+1)\right| < \varepsilon$,

$\left|\cos(n+1)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2\sin 1}$, так что $\{\cos n\}$ бесконечно малая. Но $\forall N\ \exists n > N : \cos n > \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

10.7.1. Число e.

Рассмотрим последовательность

$x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Докажем, что эта последовательность возрастает и ограниченная, поэтому она имеет конечный предел. По формуле бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

или, что то же самое

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots$$

$+\dfrac{1}{n!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)...\left(1-\dfrac{n-1}{n}\right)$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая. Действительно, запишем выражение x_{n+1} и сравним его с выражением x_n:

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+$$

$$...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+$$

$$...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$...+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1} больше соответствующего значения x_n, и, кроме того, у x_{n+1} добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.
Докажем теперь, что при любом n ее члены не превосходят трех, $x_n < 3$. В самом деле,

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

Итак, последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ - монотонно возрастающая и ограниченная сверху, поэтому имеет конечный предел.

Этот предел принято обозначать буквой e,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e .$$

Из неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ следует, что

$e < 3$.

Отбрасывая в равенстве для $\{x_n\}$ все члены, начиная с четвертого, имеем

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Переходя к пределу, получим $e \ge 2+\frac{1}{2} = 2,5$. Таким образом, $2,5 < e < 3$. Можно показать, что число e иррациональное и его значение равно 2,71828…

Аналогично $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Число e является основанием натурального логарифма. Если $\log_e x = \ln x = y$, то $e^y = x$.

10.8. Примеры монотонных последовательностей

10.8.1. Последовательность типа корня

Пример 1а. Пусть $x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$, $x_1 \geq -12$.

$x_{n+1} - x_n = \sqrt{12 + x_n} - x_n = f(x_n)$, где

$$f(x) = \sqrt{12 + x} - x, \quad f(x) = \frac{12 + x - x^2}{\sqrt{12 + x} + x},$$

$$f(x) = \frac{-(x^2 - x - 12)}{\sqrt{12 + x} + x}, \quad f(x) = \frac{-(x-4)(x+3)}{\sqrt{12 + x} + x}.$$

Заметим, что $f(x) < 0$ при $x \in (4, +\infty)$,

$f(x) > 0$ при $x \in (-3; 4)$, поэтому

(a) $4 < x_{n+1} < x_n$ при $x_1 > 4$,

(b) $4 > x_{n+1} > x_n$ при $-12 \le x_1 < 4$.

Поэтому $\{x_n\}$ монотонна и ограничена,

$\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, причем $b = \sqrt{12+b}$,

$b^2 - b - 12 = 0$, $b = 4$.

Пример 1б. Аналогично, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $a > 0$,

$$\exists \lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{a + \sqrt{1+4a}}{2}.$$

Итерационная последовательность

$x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$ (mcd)

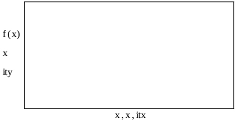
$b := 12 \qquad f(x) := \sqrt{b + x} \qquad x_0 := -3$

$N := 200$

$i := 0..N \; j := 0..2 \cdot N + 1$

$t_0 := x_0 \qquad t_{i+1} := f(t_i)$

$itx_{2 \cdot i} := t_i \quad itx_{2 \cdot i+1} := t_i \qquad ity_{j+1} := f(itx_j)$



Пример 2. Пусть $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $a > 0$,

$x_1 > 0$. $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n \;= \frac{1}{2}\frac{a - x_n^{\;2}}{x_n}$,

$x_n \geq \sqrt{a}$ $n \geq 2$, $x_{n+1} - x_n \leq 0$. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, причем $b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right)$, $b = \sqrt{a}$.

Пример 3. Пусть $x_{n+1} = 3x_n(1 - x_n)$, $x_1 \in (0;1)$.

Итерационная последовательность

$x_{n+1} = ax(b - x)$ (mcd)

$b := 1$ $\quad f(x) := a \cdot x \cdot (b - x)$ $\quad x_0 := \frac{b}{2}$

$N := 200$

$i := 0..N$ $j := 0..2 \cdot N + 1$

$t_0 := x_0$ $\quad t_{i+1} := f(t_i)$

$itx_{2 \cdot i} := t_i$ $\quad itx_{2 \cdot i+1} := t_i$ $\quad ity_{j+1} := f(itx_j)$ $\quad a \equiv 3.6$

Пример 5. Фрактал Серпинского 1 (mcd)

548

Пример 6. Дерево Ферна 1 (mcd)

Пример 7. Дерево Ферна 2 (mcd)

519

10.9. Эталонные последовательности

10.9.1. Логарифм и степенная функция

Теорема 1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\log_a n}{n^b}=0$ при $b>0$.

□ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^b}=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\log_a y^{\frac{1}{b}}}{y}=\frac{1}{b}\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\log_a y}{y}$ $=\frac{1}{b}\lim\limits_{y\to+\infty}\log_a y^{\frac{1}{y}}=\frac{1}{b}\log_a 1=0$. Заметим, что мы использовали равенство $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{1/t}=1$, которое легко доказать, используя $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$. ■

Теорема 2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^b}{p^n}=0$ при $p>1$.

□ Пусть $p=1+t$, $t>0$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^b}{p^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^b}{(1+t)^n}=\lim_{n\to+\infty}$$

$$\frac{n^b}{1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}t^k+\ldots},$$

Пусть $k > b+1$.

$$\frac{n^b}{1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}t^k+\ldots}$$

$$<\frac{n^b}{\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}t^k}\to 0. \ \blacksquare$$

Теорема 3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{p^n}{n!}=0$.

Теорема 4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

Теорема 5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Теорема 6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$.

Теорема 7.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right)=\ln 2\,.$$

Пока без доказательства.

10.9.2. М-2012-11-23-№19

10.10. Определение предела функции по Гейне.

Определение 1. **(**предела функции по Коши). Пусть $f(x)$ определена на множестве X, и a есть предельная точка X. Число b называется пределом $f(x)$ при $x\to a$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что $\forall x\in X: 0<|x-a|<\delta$ верно $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Определение 2. (предела функции в точке a по Гейне). Пусть $f(x)$ определена на множестве X, и a есть предельная точка X. Число b называется пределом $f(x)$ при $x \to a$, если $\forall x_n \in X : x_n \to a \bigcap x_n \neq a$ верно $f(x_n) \to b$.

Теорема. Определения предела функции в точке a по Гейне и по Коши эквивалентны.

☐ 1) Коши$\Rightarrow$Гейне.

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ по Коши и $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta$ верно $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пусть $x_n \to a \bigcap x_n \neq a$, так что $\exists N : \forall n > N$ верно $0 < |x_n - a| < \delta$. Тогда

$\forall n > N \;\; 0 < |x_n - a| < \delta$, так что $|f(x_n) - b| < \varepsilon$.

$\square$ 2) Гейне$\Rightarrow$Коши.

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ по Гейне. От противного.

Пусть $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x \in X :$

$0 < |x - a| < \delta \bigcap |f(x) - b| \geq \varepsilon$. Пусть $\delta_n \to 0$, причем $\delta_n > 0$. Тогда

$\exists x_n : 0 < |x - a| < \delta_n \bigcap |f(x) - b| \geq \varepsilon$. Поэтому

(1) $x_n \to a, \; x_n \neq a \;\; \Rightarrow \;\; f(x_n) \to b$,

(2) $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$. Противоречие, поэтому

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ по Коши. $\blacksquare$

Пример 1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует (по Гейне).

(1) $x_n = \dfrac{1}{2\pi n + \pi/2} \to 0,\ f(x_n) \to 1.$

(2) $y_n = \dfrac{1}{2\pi n + 3\pi/2} \to 0,\ f(y_n) \to -1.$

Отсюда следует, согласно определению предела функции по Гейне, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует.

10.10.1. Предел функции на бесконечности по Гейне

Определение Число b называется пределом $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\forall x_n \in X : x_n \to +\infty$ верно $f(x_n) \to b$.

10.11. Критерий Коши для функции

Определение. Пусть $x = a$ – предельная точка области определения $f(x)$. Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке $x = a$ условию Коши, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in X :\ 0 < |x' - a| < \delta$,

$0 < |x'' - a| < \delta$ верно $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

10.11.1. Критерий Коши

Теорема. Для того, чтобы функция имела предел в точке $x = a$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла в этой точке условию Коши.

□1) Необходимость. Пусть: $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела функции по Коши,

$\exists \delta' > 0 : \forall x' \in X :\ 0 < |x' - a| < \delta'$ верно

$|f(x') - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, тогда

$\forall x'' \in X :\ 0 < |x'' - a| < \delta'' = \delta'$ верно

$|f(x'') - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Отсюда следует, что при $0<|x'-a|<\delta'$ верно $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Условие Коши выполнено. ■

2) Достаточность. Пусть $f(x)$ удовлетворяет в точке $x=a$ условию Коши. Пусть $x_n \to a$, причем $x_n \neq a$. Докажем, что $f(x_n)$ фундаментальная. Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Тогда $\exists \delta>0 : \forall x', x'' \in X:\ 0<|x'-a|<\delta$,

$0<|x''-a|<\delta$ верно $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Так как $x_n \to a$ и $x_n \neq a$, то

$\exists N : \forall n>N$ верно $0<|x_n-a|<\delta$,

$\forall m>N$ верно $0<|x_m-a|<\delta$,

Поэтому $\left|f\left(x_n\right)-f\left(x_m\right)\right|<\varepsilon$. Это означает, что последовательность $f\left(x_n\right)$ фундаментальная. Следовательно, она сходится. Докажем, что для всех таких последовательностей $x_n \to a$ последовательность $f\left(x_n\right)$ сходится к одному и тому же числу. Пусть $f\left(x_n'\right)\to b_1$, $f\left(x_n''\right)\to b_2$ и $b_1-b_2\neq 0$. Тогда последовательность $f\left(y_n\right)$, где $y_{2k-1}=x_k'$, $y_{2k}=x_k''$, имеет две различных предельных точки. ■