Оглавление

Лекция 8. Экстремум дифференцируемой функции

8.1. *Локальный экстремум и монотонность*

8.1.1. *Понятие экстремума*

Определение 1. Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$. Будем говорить, что в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум), если найдется такая проколотая окрестность точки $x = x_0$, в которой $f(x) < f(x_0)$ при $x \neq x_0$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$). Иначе,

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \hat{\Omega}(x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$

Определение 2. Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$. Будем говорить, что в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ не имеет локального максимума, если
$\forall\varepsilon > 0\ \exists x : 0 < |x - x_0| < \varepsilon$ и $f(x) \geq f(x_0)$.

Замечание. Экстремум в соответствии с определениями 1 и 2 можно назвать строгим.

8.1.2. *Теорема Ферма*

Теорема 1 (Ферма, необходимое условие экстремума дифференцируемой функции).
Если функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ локальный экстремум и дифференцируема в точке $x = x_0$, то $f'(x_0) = 0$.

□ Пусть в точке $x = x_0$ функция имеет максимум (для минимума доказательство аналогично), но $f'(x_0) \neq 0$. Допустим, например, что $f'(x_0) > 0$. Тогда функция $f(x)$ возрастает в точке $x = x_0$ и, следовательно, существует окрестность точки x_0, в которой $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$, но это противоречит тому, что в точке x_0 функция имеет локальный максимум. Таким же образом можно показать, что $f'(x_0) < 0$ не может быть выполнено. ■

Теорема 2 (необходимое условие экстремума функции). Если функция $f\left(x\right)$ имеет в точке $x = x_0$ локальный экстремум, то или $f'\left(x_0\right) = 0$, или $f\left(x\right)$ не имеет производной в точке $x = x_0$.

Замечание. Условие $f'(x)=0$ является необходимым, но не является достаточным условием существования локального экстремума дифференцируемой функции.

Пример 1. $f(x)=x^3$ возрастает в точке $x=0$, экстремума в этой точке нет, но при этом $f'(0)=0$.

Пример 2. $f(x)=\begin{cases} 1, & x=0, \\ x, & x\neq 0, \end{cases}$ имеет максимум в точке $x=0$, но $f'(0)$ не существует.

8.1.3. *Монотонные функции*

Определение 1. Говорят, что функция $f(x)$ (1) возрастает, (2) не убывает, (3) не возрастает, (4) убывает на множестве X, если

$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2$ верно соответственно
(1) $f(x_1) < f(x_2)$, (2) $f(x_1) \le f(x_2)$,
(3) $f(x_1) \ge f(x_2)$, (4) $f(x_1) > f(x_2)$.

Теорема 3 (необходимое и достаточное условие монотонности дифференцируемой функции).
Для того чтобы дифференцируемая на промежутке X функция $f(x)$ не убывала (не возрастала) на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in X$ было верно
$f'(x) \ge 0$ (соответственно $f'(x) \le 0$).

◻ 1. Достаточность. Пусть
$\forall x \subset X \Rightarrow f'(x) \ge 0$. Возьмем $x_1 < x_2$, $x_1 \subset X$, $x_2 \subset X$. По формуле Лагранжа,

$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \geq 0$, а это и означает, что $f(x)$ не убывает на *X*. ■

□ 2. Необходимость. Пусть $f(x)$ не убывает на промежутке *X*, то есть $f(x_1) \leq f(x_2)$ при $x_1 < x_2$. Докажем, что $\forall x \subset X$ верно $f'(x) \geq 0$. Допустим, в какой–то точке $x = c$ верно $f'(c) < 0$. Тогда $f(x)$ убывает в точке $x = c$ и, следовательно, найдется такая окрестность точки *c*, где $f(x) < f(c)$ при $x > c$, но это противоречит условию не убывания, $\forall x \subset X \quad f'(x) \geq 0$. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно и, следовательно, $\forall x \subset X$ верно $f'(x) \geq 0$. ■

Замечание 1. Из возрастания функции в точке не следует ее возрастание в какой-нибудь окрестности этой точки.

Пример 1. $f(x)=\begin{cases} x+x^2\sin\dfrac{2}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases} 1+2x\sin\dfrac{2}{x}-2\cos\dfrac{2}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}.$$

Следовательно, данная функция возрастает в точке $x=0$. Вместе с тем, она не является возрастающей ни в какой окрестности точки $x=0$.

Теорема 4. Если $f(x)$ возрастает на интервале (a,b), то она возрастает в каждой точке этого интервала.

☐ Возьмем произвольную точку $c \in (a,b)$. Рассмотрим окрестность этой точки, принадлежащую (a,b). Если $f(x)$ возрастает на (a,b), то $f(x) > f(c)$ при $x > c$, $f(x) < f(c)$ при $x < c$, поэтому $f(x)$ возрастает в точке $x = c$. ■

Теорема 5. Если $f(x)$ возрастает в каждой точке интервала (a,b), то она возрастает на этом интервале.

Доказать самостоятельно.

Замечание 2. Из возрастания функции на любом промежутке следует возрастание этой функции в каждой точке этого промежутка (докажите самостоятельно).

8.1.4. *Достаточные условия экстремума монотонной функции*

Теорема 6а. Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(a-\delta_1, a]$, $\delta_1 > 0$, и убывает на промежутке $[a, a+\delta_2)$, $\delta_2 > 0$, то точка $x = a$ является точкой локального максимума функции $f(x)$.

8.1.5. *Достаточные условия экстремума дифференцируемой функции*

Теорема 6б. Если $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, $f'(x) > 0$ промежутке $(a-\delta_1, a)$, $\delta_1 > 0$, $f'(x) < 0$ на промежутке $(a, a+\delta_2)$,

$\delta_2 > 0$, то точка $x = a$ является точкой локального максимума функции $f(x)$

□ Используя формулу конечных приращений Лагранжа, убедимся в том, что $\forall x \in (a - \delta_1, a)$ верно $f(x) < f(a)$. Аналогично, $\forall x \in (a, a + \delta_2)$ верно $f(x) < f(a)$, так что точка $x = a$ является точкой максимума. ■

Теорема 6в. Если $f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$, то точка $x = a$ является точкой локального максимума функции $f(x)$.

□ $f''(a) < 0$, поэтому $f'(x) \searrow$ в точке $x = a$. Поэтому
$\exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a)$ верно $f'(x) > f'(a) = 0$, так что $\forall x \in (a - \delta, a)$ верно $f(x) < f(a)$.

Аналогично докажем, что $\forall x \in (a, a+\delta)$ верно $f(x) < f(a)$, так что точка $x = a$ является точкой максимума. ■

Замечание. При выполнении условий теоремы, $f(x) \searrow$ в каждой точке $(a, a+\delta)$, и $f(x) \nearrow$ в каждой точке $(a-\delta, a)$.

8.2. Выпуклые функции и точки перегиба

8.2.1. Определение Ильина-Позняка

Определение 1 (Ильин-Позняк). Пусть $f(x)$ дифференцируема на (a,b) и график $y = f(x)$ на (a,b) лежит не выше (не ниже) любой своей касательной, проведенной в точке $x_0 \in (a,b)$. Тогда говорят, что график функции $y = f(x)$ является выпуклым вверх (вниз) на (a,b).

Определение 2. Пусть $f(x)$ дифференцируема на (a,b) и график $y = f(x)$ на (a,b) лежит ниже (выше) любой своей касательной, кроме точки касания. Тогда говорят, что график функции $y = f(x)$ является строго выпуклым вверх (вниз) на (a,b).

Теорема 1 (достаточное условие выпуклости). Если $f''(x) \geq 0$ на (a,b), то график $f(x)$ является выпуклым вниз на (a,b).

Теорема 2. (достаточное условие строгой выпуклости). Если $f''(x) > 0$ на (a,b), то график

$f(x)$ является строго выпуклым вниз на (a,b).

□ Пусть $x_1 \in (a,b)$, $x \in (a,b)$, $x \neq x_1$, касательная $g(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получим

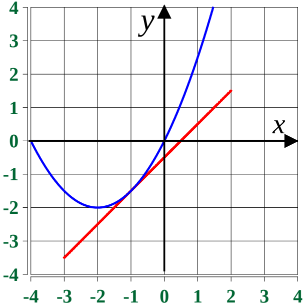
$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_1)^2,$$

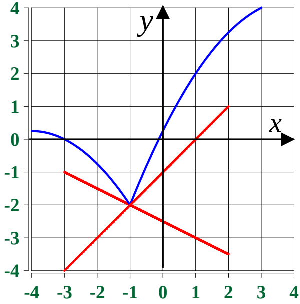
$$\xi \in (x_1, x),\ f(x) = g(x) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_1)^2,$$

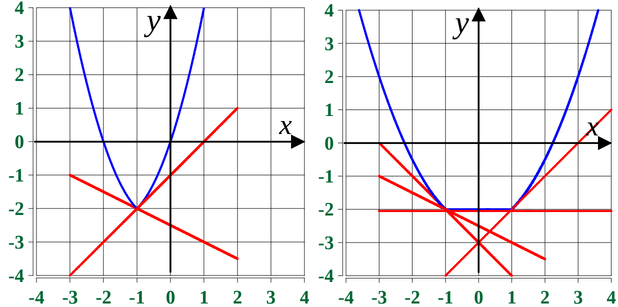
$$f(x) - g(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_1)^2 > 0 .\ ■$$

8.2.2. *Другие определения выпуклости*

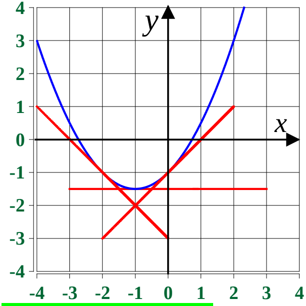
Определение 3. Прямая $y = g(x)$, $g(x) = m + nx$, называется опорной снизу в точке $x = c \in (a,b)$ для $y = f(x)$ на (a,b), если $f(c) = g(c)$ и $\forall x \in (a,b): x \neq c$ верно $f(x) > g(x)$.







Определение 4. График функции $f(x)$ называется строго выпуклым вниз на (a,b), если $\forall c \in (a,b)$ существует опорная прямая снизу в точке $x=c$.

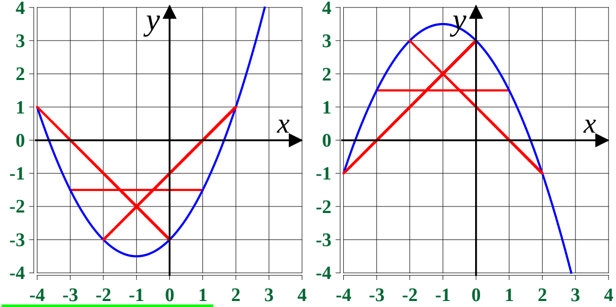


Определение 5. Отрезок прямой $y = g(x) = mx + n$, $x \in [x_1, x_2]$, называется хордой графика $y = f(x)$ на $[x_1, x_2]$, если $f(x_1) = g(x_1)$ и $f(x_2) = g(x_2)$.

Уравнение хорды

$$g(x)=\frac{(x-x_1)\,f(x_2)+(x_2-x)\,f(x_1)}{x_2-x_1}$$, причем

$x\in[x_1,x_2]$.



Определение 6. Функция $f(x)$ называется строго выпуклой вниз на (a,b), если

$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ хорда лежит выше графика при $x \in (x_1, x_2)$.

Теорема 3. (достаточное условие строгой выпуклости через хорду). Если $f''(x) > 0$ на (a,b), то $f(x)$ строго выпукла вниз на (a,b) по определению 6.

□ $x_1 \in (a,b)$, $x_2 \in (a,b)$, $x \in (x_1, x_2)$,

хорда $g(x) = \dfrac{(x - x_1) f(x_2) + (x_2 - x) f(x_1)}{x_2 - x_1}$,

$$g(x) - f(x) =$$

$$= \frac{(x - x_1) f(x_2) + (x_2 - x) f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{(x_2 - x_1) f(x)}{x_2 - x_1}$$

$$
=\frac{\left(x-x_1\right)f\left(x_2\right)+\left(x_2-x\right)f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}
$$

$$
-\frac{\left(x_2-x+x-x_1\right)f\left(x\right)}{x_2-x_1}
$$

$$
=\frac{\left(x-x_1\right)f\left(x_2\right)+\left(x_2-x\right)f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}
$$

$$
-\frac{\left(x_2-x\right)f\left(x\right)+\left(x-x_1\right)f\left(x\right)}{x_2-x_1}
$$

$$
=\frac{\left(x-x_1\right)\left(f\left(x_2\right)-f\left(x\right)\right)}{x_2-x_1}
$$

$$
+\frac{\left(x_2-x\right)\left(f\left(x_1\right)-f\left(x\right)\right)}{x_2-x_1}
$$

$$= \frac{(x-x_1)(x_2-x)\,f'(\xi)}{x_2-x_1}$$

$$- \frac{(x_2-x)(x-x_1)\,f'(\zeta)}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{(x-x_1)(x_2-x)\big(f'(\xi)-f'(\zeta)\big)}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{(x-x_1)(x_2-x)(\xi-\zeta)\,f''(\chi)}{x_2-x_1} > 0,$$

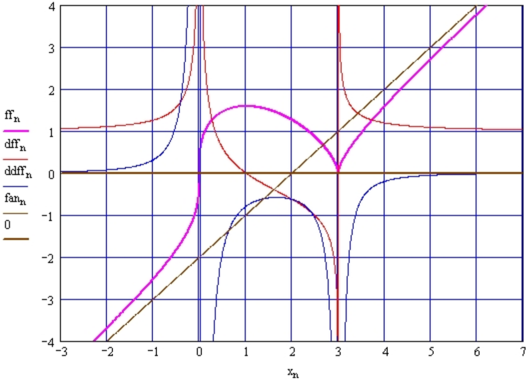
$\xi \in (x, x_2)$, $\zeta \in (x_1, x)$, $\chi \in (\zeta, \xi)$. ■

8.2.3. *Точки перегиба*

Опр. 7. Точка $x = x_0$ называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если

(1) в точке $x = x_0$ есть касательная (допустима вертикальная),
(2) в этой точке меняется направление выпуклости графика функции $y = f(x)$, т.е. найдется такая окрестность точки $x = x_0$, в которой справа и слева от x_0 направления выпуклости противоположны.

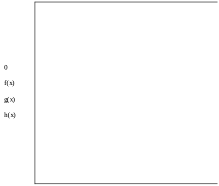
Пример 1. $f(x) = \sqrt[3]{x(3-x)^2}$.



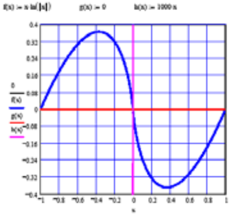
mcd-pow13-pow23a.
pdf

mcd-pow13-pow23a.
mcd

$f(x) := x \cdot \ln(|x|)$ $g(x) := 0$ $h(x) := 1000 \cdot x$



$$\begin{cases} x \ln|x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$



$df(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ $\quad ddf(x) := \frac{d}{dx} df(x)$

Given $\quad df(x) = 0 \quad Find(x) \to (\exp(-1)\ \ -\exp(-1))$

Given $\quad ddf(x) = 0 \quad Find(x) \to$

Пример 2. $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$, точка минимума $x_{\min} = 2$, точка максимума $x_{\max} = 0$, имеется по крайней мере одна точка перегиба на интервале $(-\infty, 0)$.

$$f'(x) = x^{2/3} + (x-5)\frac{2}{3}x^{-1/3},$$

$$f''(x) = \frac{4}{3}x^{-1/3} - (x-5)\frac{2}{9}x^{-4/3}$$

$$= \frac{1}{9}x^{-4/3}(12x - 2(x-5))$$

$$= \frac{1}{9}x^{-4/3}(10x+10),\ x^* = -1.$$

Лемма 1. Пусть $\forall x \subset \Omega_\delta(x_0)\ \exists f'(x)$, причем $f'(x)$ непрерывна в точке x_0, и график функции $y = f(x)$ направлен выпуклостью вниз на $(x_0, x_0+\delta)$. Тогда на $(x_0, x_0+\delta)$ график

$y = f(x)$ лежит не ниже касательной проведенной в точке $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, т.е.

$\forall x \subset \left(x_0; x_0 + \delta\right) \Rightarrow \; f(x) \geq g(x)$, где

$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)\left(x - x_0\right)$.

□ Ильин, Позняк-1 стр. 311 ■

Лемма 2. Пусть $\forall x \in \Omega_\delta\left(x_0\right) \exists f'\left(x\right)$, причем $f'(x)$ непрерывна в точке x_0, график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке x_0. Тогда $\exists \Omega_\mu\left(x_0\right)$: график $y = f(x)$ внутри $\Omega_\mu\left(x_0\right)$ лежит по разные стороны от касательной, проведенной в точке $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$,

$\forall x \subset \left(x_0 - \mu, x_0\right)$ верно $f(x) \leq g(x)$,

$\forall x \subset \left(x_0, x_0 + \mu\right)$ верно $f(x) \geq g(x)$, где $g(x)=f(x_0)+f'(x_0)\left(x-x_0\right)$.

□ Ильин, Позняк-1, стр. 312 ■

Теорема 4а (необходимое условие перегиба).

Если $\exists f''\left(x_0\right)$ и в точке x_0 график функции $f(x)$ имеет перегиб, то $f''\left(x_0\right)=0$.

□ (1) Пусть $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$, тогда $f'(x)\nearrow$ в точке x_0, $\exists\delta>0:\forall x\in\left(x_0;x_0+\delta\right)$ верно $f'(x)>f'(x_0)$, касательная

$g(x)=f(x_0)+f'(x_0)\left(x-x_0\right)$,

$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)\left(x-x_0\right)$,

$f(x)-g(x)=\left(f'(\xi)-f'(x_0)\right)\left(x-x_0\right)$

(а) пусть $x>x_0$,

$f(x)-g(x)=\left(f'(\xi)-f'(x_0)\right)\left(x-x_0\right)>0$, (б) пусть $x < x_0$,

$f(x) - g(x) = \left(f'(\xi) - f'(x_0) \right)\left(x - x_0 \right) > 0$,

$f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_0, что противоречит наличию перегиба.

(2) $f'(x_0) \neq 0$, выполнить замену

$F(x) = f(x) - f(x_0) - f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$. ■

Теорема 4б (Кудрявцев, необходимое условие перегиба). Если $f''\left(x\right)$ непрерывна в точке $x_0 \in \left(a, b\right)$ и в точке x_0 график функции $f(x)$ имеет перегиб, то $f''(x_0) = 0$. □ От противного, пусть $f''(x_0) > 0$. Тогда по теореме об устойчивости знака непрерывной функции $\exists \delta > 0 : \forall x \subset \Omega_\delta\left(x_0\right)$ верно $f''\left(x\right) > 0$, поэтому $f(x)$ направлена выпуклостью вниз в окрестности точки x_0, а это противоречит определению точки перегиба. ■

Теорема 5 (первое достаточное условие перегиба). Если $\exists f'(x_0)$, $f''(x)>0$ при $x\in(x_0,x_0+\delta)$, $f''(x)<0$ при $x\in(x_0-\delta,x_0)$, то в точке $(x_0,f(x_0))$ график функции $f(x)$ имеет перегиб.

Теорема 6 (второе достаточное условие перегиба). Если $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$, то в точке x_0 график функции $f(x)$ имеет перегиб.

□ $f'''(x_0)>0$, $f''(x)\nearrow$ в точке x_0, $\exists\delta>0:\forall x\in\left(x_0;x_0+\delta\right)\Rightarrow f''(x)>0$, $f(x)$ выпукла вниз на $\left(x_0;x_0+\delta\right)$. ■

8.3. Асимптоты

8.3.1. Вертикальная асимптота

Опр. 8а. Прямая $x=x_0$ называется вертикальной правосторонней асимптотой графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=-\infty$.

Опр. 8б. Прямая $x=x_0$ называется вертикальной левосторонней асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty$.

Опр. 8в. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной двусторонней асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\{\ldots\text{или}\ldots\}$ и $\{\ldots\text{или},,,\}$.

8.3.2. *Наклонная асимптота*

Опр. 8г. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной правосторонней асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx - b \right) = 0.$$

Опр. 8д. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной левосторонней асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0.$$

Теорема 7. (необходимое и достаточное условие наклонной асимптоты). График функции $y = f(x)$ имеет наклонную правостороннюю асимптоту $\Leftrightarrow$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$.

$\square$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$

$$\Leftrightarrow f(x)-kx-b=o(1) \Leftrightarrow f(x)-kx=b+o(1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-kx=b+o(1), \\ \dfrac{f(x)-kx}{x}=\dfrac{b+o(1)}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - kx = b + o(1), \\ \dfrac{f(x)}{x} - k = o(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - kx = b + o(1), \\ \dfrac{f(x)}{x} = k + o(1). \end{cases} . \blacksquare$$

Пример Б1. $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$, $y_{as} = x + 5$,

Пример 1. $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$,

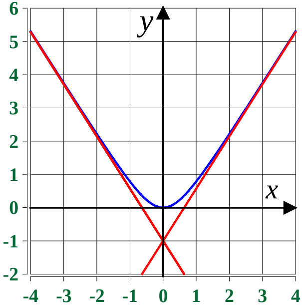
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\operatorname{arctg}x - x\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{arctg}x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x - \frac{\pi}{2}}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1/\left(1+x^2\right)}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{1+x^2} = -1,$$

$$g(x) = \frac{\pi}{2}x - 1.$$



Пример 2. $f(x) = \sqrt[3]{x(6-x)^2}$

$$= x \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{6}{x} - 1\right)^2} = x \cdot \sqrt[3]{\left(1 - \frac{6}{x}\right)^2}$$

$$= x \cdot \left(1 - \frac{6}{x}\right)^{2/3},$$

$$(1+t)^p = 1 + pt + \frac{p(p-1)}{2}t^2 + o\left(t^2\right),$$

$$(1+t)^{2/3} = 1 + \frac{2}{3}t + \frac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}t^2 + o\left(t^2\right),$$

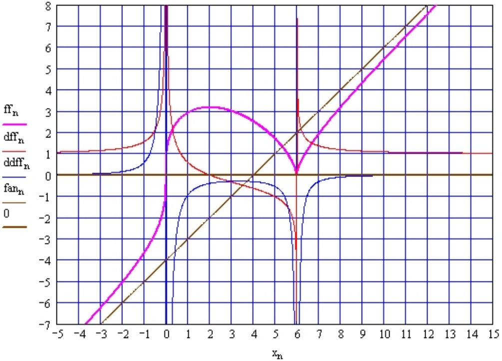
$$(1+t)^{2/3} = 1 + \frac{2}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + o\left(t^2\right),$$

$$f(x) = x \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{x} - \frac{1}{9}\left(\frac{6}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= x \cdot \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= x - 4 - \frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

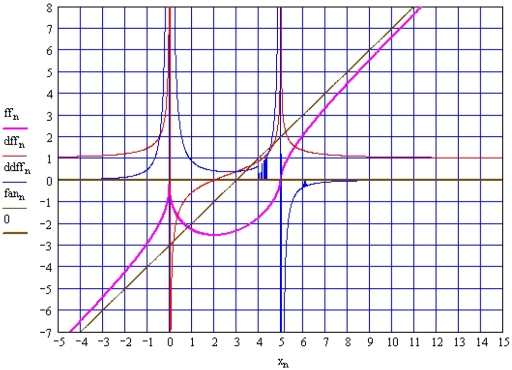
$$f(x) = \sqrt[3]{x(6-x)^2},$$



E:\02-FBI\ s1_08_Экстремуми

E:\02-FBI\ s1_08_Экстремуми

Пример 523. $f(x)=\sqrt[3]{x(6-x)^2}$,



41 MA k1s1m2-n08-График функции

E:\02-FBI\
s1_08_Экстремум и

A

$N := 2001$ $\qquad$ $n := 0..N$ $\qquad$ $xa := -5$

$$f(x) := \sqrt[5]{x^2 \cdot (x-5)^3} \qquad ff_n := f(x_n)$$

$$df(x) := \frac{d}{dx} f(x) \qquad dff_n := df(x_n) \qquad ddf(x) := \frac{d}{dx} df(x)$$

$$fa(x) := k \cdot x + b \qquad fan_n := fa(x_n)$$

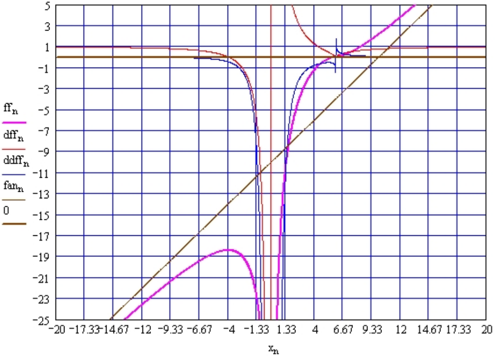
$s1 := 1$ $\qquad$ $t1 := \mathrm{Maximize}(f, s1)$ $\qquad$ $t1 = \blacksquare$

$s2 := 2.1$ $\qquad$ $t2 := \mathrm{Minimize}(f, s1)$ $\qquad$ $t2 = \blacksquare$

Given $\qquad$ $df(x) = 0$ $\qquad$ $\mathrm{Find}(x) \rightarrow \quad = \blacksquare$

Given $\qquad$ $ddf(x) = 0$

Пример А. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{(x-6)^5}{x^2}}$,



E:\02-FBI\ s1_08_Экстремум и

xma1-07-01g-pow-M 523.pdf

8.3.3. *Сложные задачи*

Пример C1. $f(x) = x\sqrt{x}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}},$

y-asin-x01.mcd

$$y_{as} = x - \frac{1}{6},$$

Пример C2. Найдите асимптоту,

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x},$$

y-secondzp-x01.mcd

Пример С3. Найдите асимптоту,

$$f(x)=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x},\ y_{as}=ex-\frac{e}{2}.$$

y-secondzp-x02.mcd

Пример С4. Найдите асимптоту,

$$f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),\ y_{as}=1,$$

y-lnasymp-x01.mcd

Пример С5. Найдите асимптоту,

$$f(x)=x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),\ y_{as}=x-\frac{1}{2},$$

y-lnasymp-x02.mcd

Пример С6. Найдите асимптоту,

$$f(x)=x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x^2,\ y_{as}=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3},$$

y-lnasymp-x02.mcd