Оглавление

Лекция 8. Правило Лопиталя.

8.1. Формула Коши

8.1.1. Теорема Коши

Теорема 1 (формула Коши). Пусть

(1) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$,

(2) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на (a,b),

(3) $\forall x \in (a,b)$ верно $g'(x) \neq 0$.

Тогда $\exists c \in (a,b): \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

□ (1) Заметим, что $g(b)-g(a) \neq 0$. В самом деле, если $g(b)=g(a)$, по теореме Ролля $\exists \xi \in (a,b): g'(\xi)=0$, что противоречит условию (3).

□ (2) Покажем, как не следует доказывать эту теорему.

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a),$$

$$g(b)-g(a)=g'(c)(b-a).$$

Разделив эти равенства друг на друга, получим формулу (1). Это доказательство не годится, так как точки c, вообще говоря, разные.

□ (3) Пусть

$$F(x)=f(x)-f(a)-$$

$$-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big).$$

Дифференцируемая функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, так как $F(a)=F(b)=0$. Поэтому $\exists c\in(a,b): F'(c)=0$,

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0,$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \blacksquare$$

Замечание. Формула Лагранжа является частным случаем формулы Коши в случае $g(x)=x$.

8.1.2. Примеры применения формулы Коши

Пример 1. Оцените $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, если

$$f(x)=\frac{-1}{x},\ g(x)=\operatorname{arctg}x,\ a=5,\ b=10.$$

□ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)},\ x\in(a,b),$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{1/x^2}{1/(1+x^2)}=\frac{1+x^2}{x^2},$$

$=\dfrac{1}{x^2}+1$,это убывающая на интервале

$(5;10)$ функция, $\dfrac{1}{x^2}+1\in\left(\dfrac{1}{10^2}+1,\dfrac{1}{5^2}+1\right)$

$=\left(\dfrac{101}{100},\dfrac{26}{25}\right)=(1{,}01;\ 1{,}04)$. ■

Пример 2. Оцените $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, если $f(x)=2\operatorname{arctg}x$, $g(x)=\ln x$, $a=0.5$, $b=2$.

□ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, $x\in(a,b)$,

$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{2x}{1+x^2}\in\left(\dfrac{4}{5};1\right]$. ■

8.2. Правило Лопиталя.

8.2.1. Теорема Лопиталя.

Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. Величину $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ называют неопределенностью типа $\dfrac{0}{0}$.

Теорема 2 (Лопиталя). Пусть

(1) $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\hat{\Omega}(a)$,

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$,

(3) $g'(x)\neq 0$ в любой точке из $\hat{\Omega}(a)$,

(4) $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

◻ Положим $f(a)=g(a)=0$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ будут непрерывны в некоторой окрестности точки a. Возьмем произвольное $x\neq a$ из этой окрестности и применим формулу Коши на $[a,x]$,

$$(\star)\ \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\text{ где } c\in(a,x).$$

Так как $f(a)=g(a)=0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Перейдем к пределу при $x\to a$, и тогда $c\to a$.

Получим $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. ■

8.2.2. Упрощенное правило Лопиталя.

Теорема 3а (упрощенное Лопиталя, 1) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке $x=a$, $f(a)=g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$.

Тогда $\exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

Теорема 3б (упрощенное Лопиталя, 2) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дважды дифференцируемы в точке $x=a$, $f(a)=g(a)=0$, $f'(a)=g'(a)=0$, $g''(a)\neq 0$. Тогда

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(a)}{g''(a)}.$$

Теорема 3c (упрощенное Лопиталя, 3)
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ трижды дифференцируемы в точке $x = a$, $f(a) = g(a) = 0$,
$f'(a) = g'(a) = 0$, $f''(a) = g''(a) = 0$, $g'''(a) \neq 0$.

Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'''(a)}{g'''(a)}$.

Пример 1a.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 5}{2x - 6} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 1b.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} = \left. \frac{2x - 5}{2x - 6} \right|_{x=2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Пример 1c.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}\right)^2.$$

Пример 1с.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}\right)^3.$$

Пример 2. Пример неправильного применения правила Лопиталя.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x-6}=\frac{-1}{-2}.$$

На самом деле, этот предел равен нулю по теореме о пределе частного.

Пример 1с.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{5-\sqrt{4x+17}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2\Big/2\sqrt{2x+5}}{-4\Big/2\sqrt{4x+17}}=\frac{-5}{3\cdot 2}=\frac{-5}{6}.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1.$

Пример 3b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x^2}=16.$

Пример Д-1359. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}+(1+x)^{\frac{1}{x}}\ln(1+x)\frac{-1}{x^2}}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\right)$$

$$=e\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}e\left(\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}\right)=e\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\ln(1+x)}{2x}\right)$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{2(1+x)}\right)=\frac{-e}{2}.$$

Замечание. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$, поэтому

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=-\frac{e}{2}+o(1) \text{ при } x\to 0,$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}-e=-x\frac{e}{2}+o(x),$$

$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e-x\frac{e}{2}+o(x)$. Эта формула применяется для оценки прироста с учетом сложных процентов.

Пример Д-1359m. Найдите

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\left(e-x\frac{e}{2}\right)}{x^2}$ и запишите формулу

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=A_0+A_1x+A_2\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right).$$

Пример 4a. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x - x^a}{x-a} =$

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x\ln a - ax^{a-1}}{1} = a^a\ln a - a\cdot a^{a-1}$$

$$= a^a\ln a - a^a\,.$$

Пример 4b. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^x - x^e}{x-e} =$

$$\lim_{x\to e}\frac{e^x\ln e - ex^{e-1}}{1} = e^e\ln e - e\cdot e^{e-1} = 0\,.$$

Пример 5a. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^x - x^e}{(x-e)^2} = \;= \lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^x - ex^{e-1}}{2(x-e)}$

$$= \lim_{x\to e}\frac{e^x - e(e-1)x^{e-2}}{2} = \frac{e^e - e(e-1)e^{e-2}}{2} = \frac{e^{e-1}}{2}\,.$$

Пример 6а. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2}{6\cos^3 x}\underbrace{\frac{-\sin x}{x}}_{1} = \frac{1}{3}.$$

Это означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x - x - \frac{1}{3}x^3}{x^3} = 0$,

или, по-другому, $\dfrac{\operatorname{tg}x - x - \frac{1}{3}x^3}{x^3} = o(1)$,

или, по-другому, $\operatorname{tg}x - x - \dfrac{1}{3}x^3 = x^3 o(1)$,

или, по-другому, $\operatorname{tg}x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

Пример 6b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x\cdot 3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\cdot\sin x}{6x} = \frac{1}{2}.$$

Пример 6c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x-\dfrac{1}{2}x^3}{x^5} =$

Пример 6d1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\arcsin x-2x}{x^5} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-2}{5x^4} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+\dfrac{x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}}{20x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(1-x^2\right)^{3/2}\sin x+x}{20x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\sin x-\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\cos x+1}{60x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\left(1-x^2\right)^{1/2}\sin x}{60x^2}$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{-\left(1-x^2\right)^{3/2}\cos x+1}{60x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}\sin x}{20x}+\lim_{x\to 0}\frac{-\left(1-x^2\right)^{3/2}\cos x+1}{60x^2}$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\pi\operatorname{ctg}\pi x\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x-\pi\ln x\cdot\cos\pi x}{\ln x\cdot\sin\pi x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x-\dfrac{\pi}{x}\cos\pi x+\pi^2\ln x\cdot\sin\pi x}{\dfrac{1}{x}\sin\pi x+\pi\cos\pi x\cdot\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\pi x\cos\pi x-\pi\cos\pi x+\pi^2 x\ln x\cdot\sin\pi x}{\sin\pi x+\pi x\cos\pi x\cdot\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\begin{gathered}\pi\cos\pi x-\pi^2 x\sin\pi x+\pi^2\sin\pi x+\\+\pi^2\ln x\cdot\sin\pi x+\pi^2\sin\pi x+\pi^3 x\ln x\cdot\cos\pi x\end{gathered}}{\begin{gathered}\pi\cos\pi x+\pi\cos\pi x\cdot\ln x+\\+\pi\cos\pi x-\pi^2 x\sin\pi x\cdot\ln x\end{gathered}}=\frac{1}{2}.$$

Решение не оптимально.

Пример 7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

Пример 8. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+x^3\right)}$

Пример 9. $\lim\limits_{x\to+0}x\ln\ln\dfrac{1}{x}=0$.

Пример. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{1}{x}}=$.

Пример 1343. $\lim\limits_{x\to+0}x^{x^x-1}=1$.

Пример 1344. $\lim\limits_{x\to+0}\left(x^{x^x}-1\right)=-1$.

Пример 1346. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}$.

Пример 1350. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x=1$.

8.2.3. Обобщенное правило Лопиталя.

Теорема 2б. (Лопиталя). Пусть

(1) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в $\hat{\Omega}(a)$,

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,

(3) $g'(x) \neq 0$ в любой точке из $\hat{\Omega}(a)$,

(4) $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to +\infty$ при $x \to a$.

Тогда $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to +\infty$ при $x \to a$.

Теорема 2в. (Лопиталя). Пусть

(1) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в $\hat{\Omega}_\delta(a)$,

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

(3) $g'(x) \neq 0$ в любой точке из $\hat{\Omega}_{\delta}(a)$,

(4) $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to b$ при $x \to a$.

Тогда $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to b$ при $x \to a$.

Теорема 2г (Лопиталя). Пусть

(1) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в $\Omega(+\infty)$,

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

(3) $g'(x) \neq 0$,

(4) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{x^{-1}} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}}$
$= \lim\limits_{x\to+0}(-x) = -0$.

Замечание. Правило Лопиталя верно также для односторонних пределов.

Пример 2. Найдем $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

Заметим, что $x^x = e^{x\ln x}$,

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\left(1/x\right)} = \lim_{x\to+0} \frac{\left(1/x\right)}{\left(-1/x^2\right)} .= \lim_{x\to+0}(-x)$$

=-0. Поэтому $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ при $\alpha>0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Таким образом, при $x \to +\infty$ логарифмическая функция растет медленнее, чем степенная с любым показателем степени, $\ln x << x^{\alpha}$ при $x \to +\infty$ и $\alpha > 0$.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{a^x}$ (n – натуральное, a>1).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x (\ln a)^n} = 0.$$

Таким образом, при $x \to +\infty$ степенная функция растет медленнее, чем показательная, $x^n << a^x$ при $x \to +\infty$ и $\alpha > 1$.

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^8}$ $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^{-4}}$ $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^4}{e^t}$.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

Замечание. Из того, что не существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, не следует, что не существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Пример 7. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{2x+\sin x}$. Ясно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{2+\cos x}$ не существует. Вместе с тем, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{2x+\sin x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sin x/x}{2+\underbrace{\sin x/x}_{\to 0}}=\dfrac{1}{2}$.

8.3. Дополнение

8.3.1. Об асимптотических формулах

Пример 6d2. $\sin(\arcsin x) = x$,

$\arcsin x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$,

$\sin(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)) = x$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

$$\left(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)\right)$$

$$-\frac{1}{6}\left(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)\right)^3$$

$$+\frac{1}{120}\left(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)\right)^5 = x,$$

1) $a = 1$,

2) $b-\frac{1}{6}a^3=0$, $b=\frac{1}{6}$,

3) $c-\frac{1}{6}\left(3a^2b\right)+\frac{1}{120}a^5=0$, $c-\frac{1}{12}+\frac{1}{120}=0$,

$c=\frac{9}{120}=\frac{3}{40}$,

$$\arcsin x = x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o\left(x^5\right).$$