Лекция 9. Формула Тейлора.

10.1. Основные асимптотические формулы

Напомним список основных асимптотических формул, каждая из которых доказывается путем вычисления некоторого предела.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right),\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right),$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right),$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o\left(x\right),\ \sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o\left(x\right),$$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2$$

$$+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + o(x^3),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2),$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o\left(x^6\right),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right),$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right),$$

10.2. Формула Тейлора.

10.2.1. Многочлен Тейлора.

Замечание 1. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Иначе, $f(x) = P_1(x) + o(x - x_0)$, где

$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, причем

$P_1(x)$ обладает следующими свойствами:

$P_1(x_0)=f(x_0)$, $P_1'(x_0)=f'(x_0)$.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 и

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Тогда $P_n(x_0)=f(x_0)$, $P_n'(x_0)=f'(x_0)$, …,

$P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0),\ldots,$ $P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$.

□ Заметим, что

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\Bigg|_{x=x_0}=\begin{cases}0, & m<k,\\ f^{(k)}(x_0), & m=k,\\ 0, & m>k.\end{cases}\ \blacksquare$$

10.2.2. *Теорема Тейлора-Пеано*

Теорема 2а. Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0. Тогда

$$f(x)=P_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right) \text{ при } x\to x_0.$$

$\square$ $R_{n+1}(x)=f(x)-P_n(x)$

$$=f(x)-[\,f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,].$$

Докажем, что $R_{n+1}(x) = o\left(\left(x - x_0\right)^n\right)$, или

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R_{n+1}(x)}{\left(x - x_0\right)^n} = 0$. Найдем

$$\lim_{x\to x_0} R_{n+1}(x) = \lim_{x\to x_0}\left[f(x) - P_n(x)\right]$$

$$= f\left(x_0\right) - P_n\left(x_0\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to x_0} R_{n+1}{}'(x) = \lim_{x\to x_0}\left[f'(x) - P_n'(x)\right]$$

$$= f'\left(x_0\right) - P_n'\left(x_0\right) = 0.$$

Аналогично,

$$\lim_{x\to x_0} R_{n+1}^{(n-1)}(x) = \lim_{x\to x_0}\left[f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x)\right]$$

$$= f^{(n-1)}\left(x_0\right) - P_n^{(n-1)}\left(x_0\right) = 0.$$

Теперь используем правило Лопиталя,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n+1}(x)}{\left(x-x_0\right)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n+1}{}'(x)}{n\left(x-x_0\right)^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n+1}{}''(x)}{n(n-1)\left(x-x_0\right)^{n-2}}=\ldots$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n+1}{}^{(n-1)}(x)}{\left[\left(x-x_0\right)^{(n)}\right]^{(n-1)}}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n+1}^{(n-1)}(x)}{\underbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}_{n!}\cdot(x-x_0)},$$ далее Лопиталя

использовать нельзя. Величина

$$\frac{R_{n+1}^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot(x-x_0)}$$

является неопределенностью типа $\dfrac{0}{0}$. Заметим, что

$$R_{n+1}^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)$$

$$-f^{(n)}(x_0)(x - x_0).$$

Так как $f^{(n-1)}(x)$ дифференцируема в x_0, то

$$f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)$$

$$= f^{(n)}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Следовательно, $R_{n+1}^{(n-1)}(x) = o(x - x_0)$, поэтому

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n+1}^{(n-1)}(x)}{[(x - x_0)^n]^{(n-1)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{o(x - x_0)}{n!(x - x_0)} = 0. \ \blacksquare$$

Теорема 2b. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0. Тогда

$$f(x) = P_2(x) + o\left(\left(x - x_0\right)^2\right) \text{ при } x \to x_0.$$

$\square$ $R_3(x) = f(x) - P_2(x) = f(x) -$

$$-\left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \right].$$

Докажем, что $R_3(x) = o\left(\left(x - x_0\right)^2\right)$, или

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R_3(x)}{\left(x - x_0\right)^2} = 0$. Найдем

$$\lim_{x\to x_0} R_3(x) = \lim_{x\to x_0}\left[f(x) - P_2(x)\right]$$

$$= f(x_0) - P_2(x_0) = 0,$$

$$R_3'(x) = f'(x) - \left[f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)\right],$$

$\lim\limits_{x\to x_0} R_3'(x)=0$, $R_3'(x)=0$,

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_3(x)}{\left(x-x_0\right)^2}$ является Лопиталевской неопределенностью типа $\dfrac{0}{0}$,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_3(x)}{\left(x-x_0\right)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_3'(x)}{2\left(x-x_0\right)}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\left[f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)\right]}{2\left(x-x_0\right)}.$$

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

Так как $f'(x)$ дифференцируема в x_0, то

$$f'(x)-f'(x_0)=f''(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_3'(x)}{2(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{o(x-x_0)}{2(x-x_0)}=0. \blacksquare$$

10.2.3. *Остаточный член в общей форме*

Теорема 3 (остаточный член в общей форме). Пусть $f(x)$ определена и $n+1$ раз дифференцируема в некоторой $\Omega(x_0)$.

Пусть $R_{n+1}(x)=f(x)-P_n(x)$, $x\in\hat{\Omega}(x_0)$, $x\neq x_0$, и $p>0$. Тогда $\exists\xi\in(x_0,x)$:

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p}\left(\frac{x-x_0}{x-\xi}\right)^p f^{(n+1)}(\xi).$$

$\square$ Пусть $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$\equiv\varphi(x,x_0)$.

Возьмем $x \neq x_0$, $x \in \hat{\Omega}\left(x_0\right)$. Пусть $p > 0$,

$t \in \left[x_0, x\right]$, тогда

$$\psi(t) = f(x) - \varphi\left(x, t\right)$$

$$-\left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^p \underbrace{\left[f(x) - \underbrace{\varphi(x, x_0)}_{P_n(x)} \right]}_{R_{n+1}(x)}$$

$$= f(x) - \varphi\left(x, t\right) - \left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^p R_{n+1}(x).$$

Докажем, что функция $\psi\left(t\right)$ на $t \in \left[x_0, x\right]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t)$$

$$-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$-\left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^p R_{n+1}(x).$$

Так как $f(x)$ дифференцируема $n+1$ раз, то $\psi(t)$ непрерывна на $[x_0, x]$, $\psi(t)$ дифференцируема на $t \in [x, x_0]$,

$$\psi(x_0) = f(x) - \varphi(x, x_0) - \left(\frac{x-x_0}{x-x_0}\right)^p \cdot$$

$$\cdot\left[f(x) - \varphi(x, x_0)\right] = 0,$$

$$\psi(x) = 0, \ \psi(x_0) = 0.$$

По теореме Ролля, $\exists \xi \in (x_0, x) : \psi'(\xi) = 0$,

$$\psi'(t) = -[\, f'(t) - f'(t)$$

$$+ f''(t)(x-t) - f''(t)(x-t)$$

$$+ \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 \;\; + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n}\,] \; + p\frac{(x-t)^{p-1}}{(x-x_0)^p} R_{n+1}(x).$$

Полагая $t = \xi$, получаем

$$\psi'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

$$+ p\frac{(x-\xi)^{p-1}}{(x-x_0)^p} R_{n+1}(x),\ \psi'(\xi) = 0,$$ поэтому

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p}\left(\frac{x-x_0}{x-\xi}\right)^p f^{(n+1)}(\xi). \blacksquare$$

10.2.4. *Остаточный в форме Лагранжа*

Следствие 1 (остаточный член в форме Лагранжа). Положим $p = n+1$. Тогда при выполнении условий теоремы 3

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

10.2.5. *Остаточный член в форме Коши*

Следствие 2 (Остаточный член в форме Коши). $p = 1$, $\xi - x_0 = \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$,

$\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $x - \xi = (1-\theta)(x - x_0)$,

$$R_{n+1}(\xi) = \frac{(x-\xi)^n}{n!}(x-x_0)\, f^{(n+1)}(\xi),$$ или

$$R_{n+1}(x)$$

$$=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right).$$

10.2.6. *Остаточный в интегральной форме*

Теорема 4а (остаточный член в интегральной форме). Пусть $f(x)$ определена и $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причем $f^{(n+1)}(x)$ непрерывная функция, и $R_{n+1}(x)=f(x)-P_n(x)$, $x\in\hat{\Omega}(a)$, $x\neq a$. Тогда $R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$.

□ $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt$

$$=f(a)-\int_a^x f'(t)\,d(x-t)$$

$$= f(a) - f'(t)(x-t)\Big|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) - \int_a^x f''(t)\,d\frac{(x-t)^2}{2}$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) - f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\Big|_{t=a}^{t=x}$$

$$+\int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt \;\; \ldots$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

$$+\frac{f'''(a)}{2\cdot 3}(x-a)^3 + \;\ldots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt\,,$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k ,$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt . \blacksquare$$

Теорема 4б (остаточный член в форме Лагранжа). Пусть $f(x)$ определена и $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причем $f^{(n+1)}(x)$ непрерывная функция, и $R_{n+1}(x)=f(x)-P_n(x)$, $x\in\hat{\Omega}(a)$, $x\neq a$. Тогда

$$\exists\xi\in(x_0,x): R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

□ $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$,

$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$. По теореме о среднем для определенного интеграла,

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$ ■

Следствие 2 (Остаточный член в форме Коши). $p=1$, $\xi - x_0 = \theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$,

10.3. Оценка остаточного члена

10.3.1. Степенно-ограниченная производная

Теорема 5а. Если функция $f(x)$ определена и имеет производную любого порядка в $\Omega(x_0)$, причем

$\exists M, \exists A, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ верно

$\left| f^{(n)}(x) \right| \le MA^n$, то $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ верно

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, или, что то же самое, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x)$, или

$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$.

Замечание. Равенство $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$ равносильно $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = S$.

□ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x)$,

$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$,

$\left| R_{n+1}(x) \right| \leq \frac{MA^{n+1}}{(n+1)!} \delta^{n+1} = M \frac{(A\delta)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$. ■

Пример 1. $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0. \end{cases}$ Тогда

$\forall n\ f^{(n)}(0)=0$, но равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=0$$ неверно.

Пример 2. $f(x)=e^x$ Тогда $\forall n\ f^{(n)}(x)=e^x$,

$\forall x\in[-b,b]$ верно $\left|f^{(n)}(x)\right|\le e^b$, равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,\ e^x=f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$ верно

для любого x.

Пример 3. $f(x)=e^{3x}$ Тогда $\forall n\ f^{(n)}(x)=3^n e^{3x}$,

$\forall x\in[-b,b]$ $\left|f^{(n)}(x)\right|\le 3^n e^{3b}$, равенство

$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k x^k}{k!}$ верно для любого x.

10.3.2. *Факториально-ограниченная производная*

Теорема 5b. Если функция $f(x)$ определена и имеет производную любого порядка в $\Omega(x_0)$, причем $\exists M, \exists A: \forall n \in \mathrm{N}, \forall x \in \Omega(x_0)$ верно

$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M \cdot n! \cdot A^n$, и $\delta = \frac{1}{A}$, то

$\forall x \in \left(x_0-\delta, x_0+\delta\right) \bigcap \Omega\left(x_0\right)$ верно

$$f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k.$$

□ $$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

$$\left|R_{n+1}(x)\right|\le\frac{M(n+1)!A^{n+1}}{(n+1)!}\delta^{n+1}=M(A\delta)^{n+1}\to 0,$$

если $\delta<\dfrac{1}{A}$ ■

Замечание. В семестре 3 мы введем понятие равномерного предела и покажем, что

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\to f(x) \text{ при } n\to+\infty$$

равномерно на указанном промежутке, что гарантируем возможность почленного дифференцирования и интегрирования равенства

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k .$$

Пример 4. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x_0=0$. Тогда

$$\forall n \quad f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\ \forall x\in[-b,b] \quad \text{верно}$$

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le n!\left(\frac{1}{1-b}\right)^{n+1},\ 1>b>0,\ A=\frac{1}{1-b},$$

$$0<x<\frac{1}{A}=1-b,\ b<1-b,\ b<\frac{1}{2},\ x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right).$$

Однако, $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, поэтому

$\forall x \in (-1;1)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k ,$$

(а) $\forall x \in (-1;1)$ $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$, .

(б) $\forall x \in (-1;1)$ $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$,

(в) $\forall x \in (-1;1)$ $\dfrac{1}{1-x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{2k}$,

(г) $\forall x \in (-1;1)$ $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$,

(д) В семестре 3 мы покажем, что следующие операции являются корректными: $\forall x \in (-1;1)$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} ,$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k x^{2k} dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Замечание 1. Форма Пеано остаточного члена непосредственно следует из общей формы, а также из форм Лагранжа и Коши. В самом деле,

$(x-x_0)^{n+1}=o((x-x_0)^n)$ при $x\to x_0$.

Замечание 2. Так как точка ξ зависит от p, то величина θ в формах Лагранжа и Коши, вообще говоря, разная.

10.3.3. *Оценка наибольшего члена*

Пример 1. $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x)$, $x > 0$, $a_k = \frac{x^k}{k!}$,

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{x^k (k-1)!}{k! \cdot x^{k-1}} = \frac{x}{k}, \quad \frac{a_k}{a_{k-1}} > 1 \bigcap \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$$

$\Leftrightarrow \frac{x}{k} > 1 \bigcap \frac{x}{k+1} < 1 \ \Leftrightarrow x - 1 < k < x$, , поэтому номер наибольшего члена равен $k_0 = [x]$, если только $[x] \neq x$, т.е. x не является целым числом. Если же $x = m$ является целым числом, то члены

$$a_{m-1} = \frac{m^{m-1}}{(m-1)!} \quad a_m = \frac{m^m}{m!} \text{ и } a_{m+1} = \frac{m^{m+1}}{(m+1)!} \quad .$$

Пример 2. $\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2}(x)$.

10.4. Формула Маклорена.

10.4.1. Что это такое

$$x_0 = 0,\ f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x$$

$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

1) $R_{n+1}(x) = o\left(x^n\right)$ – Пеано,

2) $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ – Лагранжа,

3) $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$ – Коши.

10.4.2. Разложение e^x

$$f(x)=e^x,\ P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!},\ e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)=o\left(x^n\right)$, $R_{n+1}\left(x\right)=\dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$,

$0<\xi<x$.

$\forall x\ \left|R_{n+1}\left(x\right)\right|\le\dfrac{e^{|x|}\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!}\to 0$ при $n\to+\infty$, то

есть $\underbrace{e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}_{R_{n+1}(x)}\to 0$ при $n\to\infty$, $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$ – ряд Тейлора.

Вычислим число e с точностью 10^{-6}. Положим $x=1$. Тогда

$e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}+R_{n+1}(1)$, причем

$$\left|e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right|=\left|R_{n+1}(1)\right|,\ \left|R_{n+1}(x)\right|\le\frac{e^{|x|}\left|x\right|^{n+1}}{(n+1)!},\ x=1,$$

$$\left|R_{n+1}(1)\right|\le\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Так как $7!>5\cdot10^3$, $8!>4\cdot10^4$, $9!>3\cdot10^5$, $10!>3\cdot10^6$.

Если $n=9$, то $\left|R_{10}(1)\right|<\dfrac{3}{10!}<10^{-6}$. Поэтому

$e\approx1+1+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{9!}$ с точностью не хуже 10^{-6}.

10.4.3. *Синус*

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+R_{2n+2}(x),$$

$$f(x)=\sin x,\ f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^k, & n=2k+1,\end{cases}$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, & n=2k+1,\end{cases}.$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+R_{2n+1}(x),$$

где $R_{2n+1}(x)=o(x^{2n})$,

$$R_{2n+1}(x)=\frac{\sin\left(\theta x+{(2n+1)\pi}/{2}\right)}{(2n+1)!}\,x^{2n\text{-}1}.$$

$$\forall x\ |R_{2n+1}(x)|\le\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Вычислим $\sin x$ для $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$ с точностью до 10^{-4}.

Выберем n так, чтобы $|R_{2n+1}(x)| < 10^{-4}$ для $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

$x = \dfrac{\pi}{4}$, $n=3$, $|R_7(x)| \le \dfrac{\left(\pi/4\right)^7}{7!} < 10^{-4}$.

Таким образом, $\sin x \cong x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ с точностью не хуже 10^{-4} для $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

10.4.4. *Косинус*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+1}(x),$$

$$f(x)=\cos x,\ \ f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ (-1)^k, & n=2k\end{cases}.$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\begin{cases}0,\ n=2k+1,\\ \dfrac{(-1)^2}{(2k)!}x^{2k},\ n=2k,\end{cases}.$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+R_{2n+2}(x),$$

где $R_{2n+2}(x)=o(x^{2n+1})$,

$$R_{2n+2}(x)=\frac{\cos(\theta x+(n+1)\pi)}{(2n+2)!}x^{2n+2},$$

$$\left|R_{2n+2}(x)\right|<\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\to 0 \text{ при } n\to\infty\ \forall \text{ фикси-}$$

рованного x.

10.4.5. Логарифм

$f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},$$

$$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2},$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3} = (-1)^2 2!(1+x)^{-3},$$

и так далее…

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}.$$

$$f(0) = 0,\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Таким образом, общий член формулы Маклорена имеет вид:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = o(x^n)$ (Пеано),

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \text{ (Лагранжа)},$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n (1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1} \text{ (Коши)}.$$

Докажем, что остаточный член $R_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$ $\forall$ $x \in (-1,1]$.

Сначала рассмотрим x: $0 \le x \le 1$.

$$\left| R_{n+1}(x) \right| \le \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ при } n \to +\infty,$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x).$$

В частности, для x=1 получим:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1),$$

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Отметим, что ряд $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ расходится,

$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{S_n} = +\infty$. Для любого S можно так переставить слагаемые ряда $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, что сумма вновь полученного ряда будет равна S.

Рассмотрим теперь x: $-1<x<0$.

Докажем, что $R_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Формула Лагранжа для этих целей непригодна из-за того, что в знаменателе стоит число

$0<1+\theta x<1$, возведенное в $(n+1)$-ю степень. Воспользуемся формулой Коши,

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{(1-\theta)^n}{(1-\theta|x|)^n}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1-\theta|x|)}.$$

Далее учтем, что $\dfrac{(1-\theta)^n}{(1-\theta|x|)^n}<1$,

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0 \text{ при } n\to\infty,\quad |R_{n+1}(x)| \to 0$$

при $x\in(-1,+1]$.

10.4.6. *Степенная функция*

$f(x) = (1 + x)^\alpha$, $x > -1$.
$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha-n}$.
$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)$.

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2$$

$$+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$ где

$R_{n+1}(x) = o(x^n)$.

Можно показать, что $R_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to +\infty$ $\forall$ фиксированного $x \in (-1;1)$.

Замечание 1. При $n = 1$ получим $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+o(x)$.

Замечание 2. Если $\alpha = n \in N$, то $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$, поэтому $R_{n+1}(x) \equiv 0$, получаем формулу бинома Ньютона,

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n.$$

Пример. Вычислить $\sqrt[5]{35}$.

Учтем, что $32 = 2^5$, $\sqrt[5]{35} = 2\sqrt[5]{\frac{35}{32}}$

$=2\left(1+\frac{3}{32}\right)^{1/5}$, здесь $x=\frac{3}{32}$, $\alpha=\frac{1}{5}$.

Применяя формулу Тейлора, получим

$$2\left(1+\frac{3}{32}\right)^{1/5}$$

$$=2\left(1+\frac{1/5}{1!}\cdot\frac{3}{32}+\frac{1/5\left(1/5-1\right)}{2!}\left(\frac{3}{32}\right)^2+\ldots\right).$$

10.5. Разложение сложного аргумента

Пример 1. $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x)$,

$$xe^x = x\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + xR_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k!} + R_{n+2}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{(k-1)!} + R_{n+2}(x).$$

Пример 2. $e^{x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!} + R_{2n+1}(x)$.

10.6. Применение формулы Маклорена для вычисления пределов.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ (типа 1^∞)

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \left(\frac{x - x^3/6 + o(x^3)}{x}\right)^{1/x^2} =$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^{1/x^2} = e^{1/x^2 \ln\left(1 \underbrace{- x^2/6 + o(x^2)}_{\alpha}\right)} =$$

$$= e^{1/x^2\left(-x^2/6 + o(x^2)\right)} = e^{-1/6 + o(x^2)/x^2} \to e^{-1/6}.$$

Пример 2. Найдем $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x + 2\sin x - 3x}{x^5}$.

Это неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Можно применить правило Лопиталя, но тогда бы пришлось дифференцировать 5 раз.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x - 3x}{x^5} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+{x^3}/{3}+{2x^5}/{15}\,x+o(x^5)+2\left(x-{x^3}/{6}+{x^5}/{120}+o(x^5)\right)-3x}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{{3}/{20}\,x^5+o(x^5)}{x^5}=\frac{3}{20}\,.$$