1. Точки и множества

1.1. Расстояние в пространстве

R^m

1.1.1. Понятие

Точки: $x=\left(x_1,x_2,...,x_m\right)$, $M=\left(x_1,x_2,...,x_m\right)$, $M_0=\left(x_1^{(0)},...,x_m^{(0)}\right)$.

Определение 1. *Расстоянием* между точками $x=\left(x_1,x_2,...,x_m\right)$ и $y=\left(y_1,y_2,...,y_m\right)$ называется число

$$\rho(x,y)=\sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2+...+\left(x_m-y_m\right)^2}\ .$$

Определение 2. *Длиной вектора* $x=\left(x_1,x_2,...,x_m\right)$ называется число

$$\rho(x,0)=\sqrt{\left(x_1\right)^2+...+\left(x_m\right)^2}\ .$$

1.1.2. Неравенство Коши

Теорема 1 (неравенство Коши). $\forall x, y$ верно

$$\left|\sum_{k=1}^{m} x_k y_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2} .$$

□ Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ и

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k .$$

Тогда $(x - ty, x - ty) \ge 0$,

$t^2 (y, y) - 2t(x, y) + (x, x) \ge 0$,

$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \le 0$, $(x, y)^2 \le (x, x)(y, y)$,

$|(x, y)| \le \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$. ■

1.1.3. *Свойства расстояния.*

1) Всегда $\rho(x,y)\geq 0$, причем $\rho\left(x,y\right)=0 \Leftrightarrow x=y$ (положительная определенность),

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (симметричность),

3) $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$ (неравенство треугольника).

1.2. *Множества точек*

1.2.1. *Окрестности*

Опр.1. Множество точек $\bar{K}(M_0,r)=\left\{M:\rho(M,M_0)\leq r\right\}$, $r>0$, называется ***замкнутым шаром*** радиуса r с центром M_0.

Опр.2. Множество точек $K(M_0,r)=\left\{M:\rho(M,M_0)<r\right\}$ называется

открытым шаром радиуса $r > 0$ с центром M_0.

Опр.3. Открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке M_0 будем называть шаровой $\varepsilon-$ ***окрестностью*** точки M_0,

$\Omega_\varepsilon(M_0) = \{M : \rho(M, M_0) < \varepsilon\}$.

Опр.4. Множество точек $\{M : \rho(M, M_0) = r\}$ называется ***сферой*** радиуса $r > 0$ с центром M_0.

Пусть точка M_0 имеет координаты $\left(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}\right)$, и $d_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Опр.5. Множество точек $\left\{M : \left|x_k - x_k^{(0)}\right| < d_k, 1 \le k \le m\right\}$ называется ***открытым параллелепипедом*** с центром M_0.

1.2.2. *Внутренние и граничные точки*

Опр.6. Точка M называется ***внутренней*** точкой множества G, если $\exists \Omega_{\varepsilon}(M) \subset G$, $\varepsilon > 0$.

Опр.7. Точка M называется ***граничной*** точкой множества G, если в любой $\varepsilon -$ окрестности точки M содержатся точки как принадлежащие G, так и не принадлежащие G, то есть $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists M_1 \in \Omega_{\varepsilon}(M) : M_1 \in G,$$

$$\exists M_2 \in \Omega_{\varepsilon}(M) : M_2 \notin G.$$

Замечание 1. внутренняя точка множества всегда принадлежит этому множеству,

Замечание 2. граничная точка множества может принадлежать, а может не принадлежать множеству.

1.2.3. Открытые и замкнутые множества

Опр.1. Множество G называется ***открытым***, если все его точки – внутренние.

Опр.2. Множество G называется ***замкнутым***, если оно содержит все свои граничные точки.

Опр.3. Множество всех граничных точек множества G называется ***границей*** множества G.

Опр.4. Множество всех внутренних точек множества G называется ***внутренностью*** множества G.

Примеры.

1) сфера $S_r(M_0)=\{M:\rho(M,M_0)=r\}$ в R^3 является границей замкнутого шара $\bar{K}_r(M_0)=\{M:\rho(M,M_0)\le r\}$.

2) та же сфера $S_r(M_0)=\{M : \rho(M,M_0)=r\}$ в R^3 является границей открытого шара $\Omega_r(M_0)=\{M : \rho(M,M_0)<r\}$.

3) сфера $S_r(M_0)=\{M : \rho(M,M_0)=r\}$ в R^3 является границей самой себя.

4) сфера $S_r(M_0)=\{M : \rho(M,M_0)=r\}$ в R^3 есть замкнутое множество.

5) Шар $\overline{K}(M_0,r)=\{M : \rho(M,M_0)\le r\}$ в R^3 есть замкнутое множество.

5) Шар $K(M_0,r)=\{M : \rho(M,M_0)<r\}$ в R^3 есть открытое множество.

Опр.5. Точка M называется ***изолированной точкой*** множества G, если $\exists\Omega_\varepsilon(M)$, в которой нет других точек множества G, кроме самой точки M.

1.2.4. Предельные точки

Определение 6а. Точка M называется ***предельной точкой*** множества G, если в любой ε – окрестности точки M содержится по крайней мере одна точка множества G, отличная от точки M.

Определение 6б. Точка M называется ***предельной точкой*** множества G, если $\exists M_k \to M,\ M_k \in G,\ M_k \neq M$.

Замечание 3. Любая внутренняя точка множества является его предельной точкой.

Замечание 4. Граничная точка может быть или предельной точкой множества, или изолированной.

Замечание 5. Изолированная точка множества не может быть предельной точкой этого множества.

Замечание 6. Изолированная точка множества не может быть внутренней точкой этого множества.

☐ Точка M называется граничной точкой множества G, если и только если $\forall\varepsilon>0$ верно

a) $\exists M_1 \subset \Omega_\varepsilon(M) : M_1 \in G$,

b) $\exists M_2 \subset \Omega_\varepsilon(M) : M_2 \notin G$.

Точка M называется изолированной точкой множества G, если и только если $M \in G$ и одновременно $\exists\varepsilon>0$:

$\left\{N : 0<\rho\left(N,M\right)<\varepsilon\right\} \notin G$.

Точка M не является изолированной точкой множества G, если и только если $M \notin G$ или $M \in G$, но $\forall\varepsilon>0 \;\; \exists N \in G : 0<\rho\left(N,M\right)<\varepsilon$.

В обоих случаях в любой окрестности точки M найдется по крайней мере одна точка множества G, отличная от точки M. ■

1.2.5. *Ограниченные множества*

Определение 1а. Множество G называется ***ограниченным***, если все его точки содержатся в некотором шаре.

Определение 1б (равносильное). Множество G называется ***ограниченным***, если

$\exists R > 0 : \forall M \in G$ верно $\rho\left(M, O\right) < R$.

Определение 2а. Множество G называется ***неограниченным***, если для любого шара найдется точка множества G, находящаяся вне этого шара.

Опр.2б (равносильное). Множество G называется ***неограниченным***, если

$\forall R > 0 \; \exists M \in G : \rho\left(M, O\right) \geq R$.

1.2.6. Непрерывная кривая

Определение 1. 1) Множество $L=\left\{M\left(x_1,...,x_1\right)\right\}$: $x_1=\varphi_1(t),\ldots,x_m=\varphi_m(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, причем функции $\varphi_1(t),...,\varphi_m(t)$ непрерывны на $\left[\alpha,\beta\right]$, называется ***непрерывной кривой***. Точки $A(\varphi_1(\alpha),\ldots,\varphi_m(\alpha))$ и $B(\varphi_1(\beta),\ldots,\varphi_m(\beta))$, если они не совпадают, называют концами кривой. Говорят, что кривая L соединяет точки A и B.

2) Если точки $A(\varphi_1(\alpha),\ldots,\varphi_m(\alpha))$ и $B(\varphi_1(\beta),\ldots,\varphi_m(\beta))$ совпадают, то кривая называется замкнутой.

Определение 2. Множество $l=\{M\left(x_1,...,x_m\right)$: $x_1=x_1^{(0)}+\lambda_1 t,\ldots,x_m=x_m^{(0)}+\lambda_m t$, $t\in\left(-\infty,+\infty\right)\}$, причем не все коэффициенты λ_k равны нулю, называется ***прямой***. Говорят, что эта прямая проходит через точку $M_0\left(x_1^{(0)},\ldots,x_m^{(0)}\right)$. Вектор $\vec{l}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ называется направляющим вектором.

1.2.7. *Связные множества*

Определение 1. Множество G называется ***связным***, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому множеству.

1.2.8. *Окрестности*

Определение 1. Любое открытое связное множество, содержащее точку M, будем называть ***окрестностью*** этой точки.

Теорема 1. В любой окрестности точки M содержится некоторая ее ε – шаровая окрестность.

1.2.9. Выпуклые множества

Определение 1. Множество X называется выпуклым: если $\forall M, N \in X, \forall t \in [0;1]$ верно

$$K(t) = M(1-t) + Nt \in X,$$

где M, N, K векторы.

На плоскости $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $K(x, y)$,

$$x = (1-t)x_1 + tx_2, \; y = (1-t)y_1 + ty_2.$$

Теорема 1. Пересечение двух выпуклых множеств есть выпуклое множество. □ Самостоятельно. ■

Теорема 2. Пересечение любого набора выпуклых множеств есть выпуклое множество. □ Самостоятельно. ■

Определение 2а. Выпуклой оболочкой множества X называется пересечение всех выпуклых множеств $Y : X \subset Y$.

Определение 2б. Выпуклой оболочкой множества X называется множество Y, состоящее из всех точек K таких, что $\exists M \in X$, $\exists N \in X$, $\exists t \in [0;1]$: $K(t) = M(1-t) + Nt \in X$.

На плоскости $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $K(x, y)$, $x = (1-t)x_1 + tx_2$, $y = (1-t)y_1 + ty_2$.

1.3. Последовательность точек в пространстве.

1.3.1. Понятие последовательности

Определение 1а. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие точка $M_n \in R^m$, то говорят, что в пространстве задана ***последовательность точек*** $\{M_n\} = M_1, M_2, ...$

Определение 1б. Последовательность точек $\{M_n\} = M_1, M_2, \ldots$ есть векторная m–мерная функция, заданная на множестве натуральных чисел.

Замечание. Последовательность можно обозначать также M_n, предполагая, что n есть множество всех натуральных чисел.

1.3.2. *Предел последовательности*

Определение 2. Точка N называется ***пределом*** последовательности M_n при $n \to +\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_n, N) = 0$. Можно записать

$N = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$ или $M_n \to N$ при $n \to +\infty$.

Теорема 1а. Если $M_n \to N$ при $n \to +\infty$,

$M_n = \left(x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$, $N = \left(y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}\right)$, то для всех $k \in \{1,...,m\}$ верно $x_n^{(k)} \to y^{(k)}$ при $n \to +\infty$.

□ Пусть $R_n = \max\limits_{k\in\{1;2;...;m\}} \left| x_n^{(k)} - y^{(k)} \right|$. Тогда

1) $\rho(M_n, N) \le \sqrt{m} R_n$, 2) $R_n \le \rho(M_n, N)$. ■

Теорема 1б. Если для всех $k \in \{1,...,m\}$ верно $x_n^{(k)} \to y^{(k)}$ при $n \to +\infty$, то последовательность $M_n = \left(x_n^{(1)},...,x_n^{(m)}\right)$ сходится, $M_n \to N$ при $n \to +\infty$, к точке $N = \left(y^{(1)},...,y^{(m)}\right)$,

□ Пусть $R_n = \max\limits_{k\in\{1;2;...;m\}} \left| x_n^{(k)} - y^{(k)} \right|$. Тогда

1) $\rho(M_n, N) \le \sqrt{m} R_n$, 2) $R_n \le \rho(M_n, N)$. ■

1.3.3. Фундаментальные последовательности

Определение 3. Последовательность точек M_n называется ***фундаментальной***, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N, \forall k > n$ верно $\rho\left(M_n, M_k\right) < \varepsilon$.

Иногда пишут равносильную формулу, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N, \forall p \geq 1\ \ \rho\left(M_n, M_{n+p}\right) < \varepsilon$.

Теорема 2. Если последовательность $M_n = \left(x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$ фундаментальная, то $\forall k \in \{1, \ldots, m\}$ числовая последовательность $x_n^{(k)}$ также фундаментальная.

Теорема 3. Если $\forall k \in \{1, \ldots, m\}$ числовая последовательность $x_n^{(k)}$ фундаментальная, то последовательность $M_n = \left(x_n^{(1)},...,x_n^{(m)}\right)$ фундаментальная. □ Самостоятельно ■

1.3.4. Критерий Коши для последовательности

Теорема 4 (***критерий Коши*** сходимости последовательности). Для того, чтобы последовательность точек $M_n = \left(x_n^{(1)},...,x_n^{(m)}\right)$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

□ 1. ***Достаточность***. Пусть последовательность $M_n = \left(x_n^{(1)},...,x_n^{(m)}\right)$ – фундаментальная. Тогда $\forall k \in \{1,...,m\}$ последовательности $x_n^{(k)}$ также фундаментальные. Отсюда в силу критерия Коши для числовых последовательностей следует, что эти последовательности сходятся. Поэтому последовательность точек $M_n = \left(x_n^{(1)},...,x_n^{(m)}\right)$ сходится. ■

□ ***2. Необходимость***. Пусть последовательность $M_n = \left(x_n^{(1)},...,x_n^{(m)}\right)$ сходится. Тогда $\forall k \in \{1,...,m\}$ последовательности $x_n^{(k)}$ также сходятся. Поэтому последовательность $M_n = \left(x_n^{(1)},...,x_n^{(m)}\right)$ сходится. ■

1.4. Теорема Больцано – Вейерштрасса.

Определение. Последовательность $M_n = \left(x_n^{(1)},...,x_n^{(m)}\right)$ называется ограниченной, если все ее члены содержатся в некотором шаре.

Отметим, что M_n ограничена, если и только если $\exists R : \forall n$ верно $\rho\left(M_n, O\right) \le R$.

Теорема 5 (Больцано–Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности M_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

□ Пусть $M_n = \left(x_n^{(1)}, ..., x_n^{(m)}\right)$ ограничена. Тогда $\exists R : \forall n$ верно

$$\rho\left(M_n, O\right) = \sqrt{\left(x_n^{(1)}\right)^2 + ... + \left(x_n^{(m)}\right)^2} \le R.$$

Отсюда следует, что $\left|x_n^{(1)}\right| \le R, \ldots, \left|x_n^{(m)}\right| \le R$, то есть числовые последовательности $x_n^{(1)}$, … $x_n^{(m)}$ ограничены. По теореме Больцано – Вейерштрасса для числовых последовательно-

стей, из последовательности $x_n^{(1)}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность
$x_{n_1}^{(1)} \to a_1$.
Выделим из $x_{n_1}^{(1)}$ сходящуюся подпоследовательность $x_{n_2}^{(2)} \to a_2$. Отметим, что при этом
$x_{n_2}^{(1)} \to a_1$, так как n_2 есть
под последовательность n_1.
Продолжая этот процесс, получим подпоследовательности $x_{n_k}^{(k)} \to a_k$. Поэтому последовательность точек $\{ M_{n_m} \} \to A(a_1, \dots, a_m)$. ■