Предел ФНП

10.1. Предел ФНП

10.1.1. *Понятие*

Пусть X непустое множество точек $M\left(x_1,...,x_m\right)$ в m–мерном евклидовом пространстве R^m.

Определение 1. Если каждой точке $M \in X$ поставлено в соответствие некоторое число f, то говорят, что на множестве X определена функция m переменных $f(M)$, или $f(x_1, \ldots, x_m)$.

Множество X называется областью определения функции.

Функцию двух переменных обозначим $z = f(x, y)$. Графиком функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in X$, называется множество точек $z = f(x, y)$, $(x, y) \in X$, в *трехмерном* пространстве (x, y, z).

Функцию трех переменных обозначаем $u = f(x, y, z)$. Графиком функции $u = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$, называется множество точек $u = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$, в четырех*мерном* пространстве (x, y, z, u).

10.1.2. *Предел*

Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве X, и M_0 – предельная точка X.

Определение 1а (предела по Коши).

Число b называется пределом функции $f(M)$ в точке M_0 (при $M \to M_0$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall M \in X: 0 < \rho(M, M_0) < \delta$ верно $\left| f(M) - b \right| < \varepsilon$.

Определение 1б (предела по Гейне).

Число b называется пределом функции $f(M)$ в точке M_0 (при $M \to M_0$), если

$\forall M_n \to M_0$, $M_n \in X$, $M_n \neq M_0$, соответствующая последовательность значений функции $f(M_n) \to b$.

Обозначение: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = b$.

Теорема. Определения 1 и 2 эквивалентны.

□ Доказательство абсолютно аналогично доказательству соответствующей теоремы для функции одной переменной. ■

Пример 1. Пусть

$$u(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} \text{ при}$$

$$x \neq 0 \cap y \neq 0,\ u(x,0) = 0,\ u(0,y) = 0.$$

Докажем, что $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} u(x,y) = 0$.

□ 1) Так как

(1) $x = o(1)$ при $(x, y) \to (0;0)$,

(2) $y = o(1)$ при $(x, y) \to (0;0)$,

(3) $\sin\frac{1}{x} = O(1)$ в $\hat{\Omega}(0;0)$,

(4) $\sin\frac{1}{y} = O(1)$ в $\hat{\Omega}(0;0)$,

(5) $O(1) \cdot O(1) = O(1)$,

(6) $o(1) \cdot O(1) = o(1)$,

то $u(x, y) = o(1)$ при $(x, y) \to (0;0)$. ■

□ 2) Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, если

$\rho(M(x,y),O(0,0))<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, то $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|y| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Поэтому $\left|u(x,y)-0\right| \le |x|+|y| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$. Это и означает, что $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)=0$. ■

10.1.3. *Предел по гладкой кривой*

Определение 1. Пусть $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$, $\varphi(t)\in C_1$, $\psi(t)\in C_1$, и $\lim\limits_{t\to t_0} u\left(x(t),y(t)\right)=b$. Тогда говорят, что в точке $M_0=\left(x(t_0),y(t_0)\right)$ функция $u(x,y)$ имеет предел вдоль гладкой кривой $C=\left\{x=\varphi(t),y=\psi(t)\right\}$.

Теорема 1. Если $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = b$, то $\forall C$ (гладкой кривой) верно $\lim\limits_{t\to t_0} u\big(x(t), y(t)\big) = b$.

Замечание 1. Можно привести пример $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)$, но $\forall k$ верно $\lim\limits_{x\to 0} u(x, kx) = b$.

Пример 2. Пусть $u(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 > 0$, $u(0,0) = 0$.

Рассмотрим прямую $y = kx$ (проходящую через начало координат). Пусть

$M(x,y) \to O(0;0)$ вдоль этой прямой. Тогда $\lim\limits_{\substack{y=kx,\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{2k}{1+k^2}$.

Таким образом, по разным прямым, проходящим через начало координат, получим различные предельные значения функции. Отсюда следует, что предел функции в точке $O(0,0)$ не существует.

Пример 3а. Пусть $u(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$,

$x^2+y^2>0$, $u(0,0)=0$.

Рассмотрим произвольную параболу $y=kx^2$ проходящую через координат). Пусть

$M(x,y) \to O(0;0)$ вдоль этой параболы.

Тогда $\lim\limits_{\substack{y=kx^2 \\ x\to 0}} u(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2kx^2}{x^4+k^2x^4} = \dfrac{2k}{1+k^2}$.

Таким образом, по разным линиям, проходящим через начало координат, получим различные пределы функции. Отсюда следует, что предел функции в точке $O(0;0)$ не существует.

Пример 3б. Пусть $u(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$, $x^2+y^2>0$, $u(0,0)=0$. Если $y=kx$, то

$$\lim_{\substack{y=kx\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2kx}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx}{x^2+k^2} = 0.$$

Из этого не следует существование предела в точке $(0,0)$.

Определение 1. Если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = 0$, то $f(M)$ называется бесконечно малой в точке M_0.

Определение 2. Пусть $\alpha(M)$ и $\beta(M)$ – бесконечно малые в точке M_0. Если $\lim\limits_{M\to M_0} \dfrac{\alpha(M)}{\beta(M)} = C \neq 0$, то α и β называются бесконечно малыми одного порядка в точке M_0.

Определение 3. Если $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{\alpha(M)}{\beta(M)} = 1$, то α и β называются эквивалентными бесконечно малыми при $M \to M_0$, $\alpha \sim \beta$.

Определение 4. Если $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{\alpha(M)}{\beta(M)} = 0$, то α называется бесконечно малой более высокого порядка, чем β, при $M \to M_0$. В этом случае $\alpha(M) = o(\beta(M))$.

Теорема 2. Если функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве X, для которого точка M_0 является предельной точкой,

$\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = b$, $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = c$, то

1) $\lim\limits_{M \to M_0} \big(f(M) \pm g(M)\big) = b \pm c$,

2) $\lim\limits_{M\to M_0}\Big(f(M)\cdot g(M)\Big)=bc$,

3) если $c\neq 0$, то $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f(M)}{g(M)}=\dfrac{b}{c}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы для одной переменной.

Определение 5а (предел в бесконечно удаленной точке по Коши). Число b называется пределом функции при $M\to\infty$ по Коши, $\lim\limits_{M\to\infty} f(M)=b$, если

$\forall\varepsilon>0\ \exists R:\forall M:\rho(M,O)>R$ верно

$\big|f(M)-b\big|<\varepsilon$.

Определение 5б (предел в бесконечно удаленной точке по Гейне). Число b называется пределом функции при $M\to\infty$ по Гейне,

$\lim\limits_{M\to\infty} f(M) = b$, если $\forall M_n : \left|M_n\right| \to +\infty$, $M_n \in X$, соответствующая последовательность значений функции $f(M_n) \to b$. Пример 1. $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0$.

10.2. Повторные пределы.

10.2.1. Понятие

Пусть функция $f(x,y)$ определена в $\hat{\Omega}(M_0)$

$\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y=y_1}} f(x,y) = \varphi(y_1)$, и $\exists \lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = b$.

В таком случае говорят, что существует повторный предел функции $f(x,y)$ (сначала по

x, затем по y) в точке (x_0, y_0),

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = b_1.$$

Аналогично определяется другой повторный предел, $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = b_2$.

Пример 1. Пусть $u(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $x^2+y^2 \neq 0$. Тогда

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} u(x,y) = \lim_{x \to 0} \lim_{\substack{y \to 0 \\ x=const \\ x \neq 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} 1 = 1,$$

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} u(x,y) = \lim_{y \to 0} \lim_{\substack{x \to 0 \\ y=const \\ y \neq 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$= \lim_{y \to 0} (-1) = -1.$$

Таким образом, в данном случае повторные пределы существуют и не равны друг другу.

Докажем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ не существует.

Пусть $y = kx$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Подходя по разным прямым $y = kx$ к началу координат, получаем разные значения предела, следовательно, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)$ не существует.

Пример 2. (предел в бесконечно удаленной точке).

Пусть $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2>0$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=$

$$\underset{\substack{x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi}}{=}\lim_{\rho\to\infty}\frac{\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{\rho^2}=\cos 2\varphi,$$

пределы получаются разные при стремлении к ∞ по разным лучам, поэтому $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не существует.

Пример 3 (предел в бесконечно удаленной точке). Пусть $u(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$, $x^2+y^2>0$. Найдем $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} u\left(x,y\right)$.

А) $x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2$,

$$x^2y^2=\left(xy\right)^2=\left(\sqrt{x^2y^2}\right)^2$$

$$\le\left(\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)^2=\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)^2,$$

$$x^4+y^4\ge\left(x^2+y^2\right)^2-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2,$$

$$x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^2,$$

Б) $x^3 + y^3 = \left(x + y\right)\left(x^2 - xy + y^2\right),$

$$\left|xy\right| \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right),$$

$$\left|x + y\right| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

$$\left|x^3 + y^3\right| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right),$$

$$\left|x^3 + y^3\right| \leq 3\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\left|u(x,y)\right| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}\right| \le \frac{3\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\le 6\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$