9.........................................................................1
10. Непрерывные ФНП ..............................1
10.1. Непрерывные ФНП ..........................2
10.2. Непрерывность по отдельным переменным .............................................4
10.3. Основные теоремы о непрерывных функциях.................................................8
10.4. Непрерывность сложной функции ..9
10.4.1. Теорема (1-я Вейерштрасса) ..12
10.4.2. Пример. ...................................14
10.5. Точные грани функции..................15
10.5.1. Понятие точной грани ...........15
10.5.2. Теорема (2-я Вейерштрасса) ..16
10.6. Равномерная непрерывность функции.................................................18

# Непрерывные ФНП

# 10.1. Непрерывные ФНП

**Определение 1**. Пусть функция $f(M)$ определена на множестве $X$, и пусть $M \in X$ – предельная точка $X$. Функция $f(M)$ называется ***непрерывной*** в точке $M \in X$, если $\lim\limits_{N \to M} f(N) = f(M)$.

**Определение 2**. Функция $f(M)$ называется ***непрерывной*** на множестве $X$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

**Определение 3**. Предельные точки области определения функции, в которых функция не является непрерывной, называются ***точками разрыва*** функции.

Замечание 1. Точка непрерывности $M$ обязательно принадлежит $X$, $M \in X$.

Замечание 2. В определении ***точки разрыва*** нет требования $M \in X$.

Упражнение 1. Сформулируйте самостоятельно определение точки устранимого разрыва функции нескольких переменных.

**Определение 4.** Приращением (точнее, полным приращением) функции $u = f(M)$ в точке $M_0 \in X$ называется функция $\Delta u = f(M) - f(M_0)$, определенная на $X$.

Условие непрерывности функции в точке $M_0$ можно записать в виде

$$\lim_{M \to M_0} \Delta u = \lim_{M \to M_0} \left( u(M) - u(M_0) \right) = 0.$$

Пусть точка $M$ имеет координаты $(x_1, \ldots, x_m)$, а точка $M_0$ – координаты $\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right)$.

Введем обозначения

$$x_1 - x_1^{(0)} = \Delta x_1, \ldots, x_m - x_m^{(0)} = \Delta x_m.$$

Тогда

$$\Delta u = f\left(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \ldots, x_m^{(0)} + \Delta x_m\right)$$
$$- f\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right),$$

условие непрерывности равносильно

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta u = 0 .$$

## 10.2. Непрерывность по отдельным переменным

**Определение 1**. Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$ то функция $f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной *x*.

Аналогично, если $\lim\limits_{y \to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$, то функция $f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной *y*.

Введем обозначение

$\Delta_x u = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0, y_0\right)$.

Величина $\Delta_x u$ называется частным приращением функции в точке $M_0$, соответствующим приращению $\Delta x$ аргумента $x$.

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x u = 0$, то функция $f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной $x$.

Теорема. Пусть функция $f\left(x_1, \ldots, x_m\right)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0$ и непрерывна в точке $M_0\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right)$. Тогда $f\left(x_1, \ldots, x_m\right)$ непрерывна в этой точке по каждой из переменных. □ Самостоятельно ■

Замечание. Обратное утверждение неверно.

Пример. $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

Тогда $u(x,0)=0$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}u(x,0)=0$. Это означает, что функция непрерывна в точке $O(0,0)$ по переменной $x$. Точно так же, $u(x,y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$ по переменной $y$. Вместе с тем, функция $u(x,y)$ не является непрерывной в точке $O(0,0)$, поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y)$ не существует.

Замечание. Пусть $u(x,y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0,y_0)$ вдоль любой прямой, проходящей через эту точку. Следует ли из этого непрерывность в точке $M_0(x_0, y_0)$ по совокупности переменных?

□ Ответ отрицательный. ■

Пример 1. $u(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 \neq 0. \end{cases}$.

Пример 2.

$$u(x, y) = \begin{cases} (x + y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}.$$

Так как $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x, y) = 0$, то функция $u(x,y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$.

# 10.3. Основные теоремы о непрерывных функциях.

Теорема 1 (арифметические операции над непрерывными функциями). Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ определены в некоторой окрестности точки $M_0$ и непрерывны в точке $M_0$. Тогда функции $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ (последнее при условии $g(M_0) \neq 0$) непрерывны в точке $M_0$.

Замечание. Достаточно потребовать, чтобы пересечение областей определения имело предельную точку $M_0 \in X$ □ ■

# 10.4. Непрерывность сложной функции

Теорема 2 (о непрерывности сложной функции) Пусть функции $\varphi_1(t_1,...,t_k),\ldots,\varphi_m(t_1,...,t_k)$ определены в некоторой окрестности точки $P_0\left(t_1^{(0)},...,t_k^{(0)}\right)$ и непрерывны в точке $P_0$, $\varphi_1\left(t_1^{(0)},...,t_k^{(0)}\right)=x_1^{(0)},\ldots,\varphi_m\left(t_1^{(0)},...,t_k^{(0)}\right)=x_m^{(0)}$. Пусть $f(x_1,...,x_m)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0\left(x_1^{(0)},...,x_m^{(0)}\right)$ и непрерывна в точке $M_0$. Тогда сложная функция $f\left(\varphi_1(t_1,...,t_k),...,\varphi_m(t_1,...,t_k)\right)$ непрерывна в точке $P_0\left(t_1^{(0)},...,t_k^{(0)}\right)$.

□ Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы для функции одной переменной. Самостоятельно. ■

Теорема 3 (об устойчивости знака непрерывной функции). Пусть $f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0\left(x_1^{(0)},\dots,x_m^{(0)}\right)$, непрерывна в точке $M_0$ и $f(M_0)>0$. Тогда существует окрестность точки $M_0$, в которой $f(M)>0$. □ Самостоятельно ■

Теорема 4 (о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение). Пусть функция $f(M)$ непрерывна на связном множестве $X$, и пусть $M_1$ и $M_2$ – любые две точки из этого множества, причем $f(M_1)=u_1$ и $f(M_2)=u_2$. Пусть $v\in[u_1,u_2]$.

Тогда на любой непрерывной кривой, соединяющей точки $M_1$ и $M_2$ и целиком принадлежащей $X$, $\exists N$: $f\left(N\right)=v$.

□ Пусть $L=\{M(x_1,\ldots,x_m)$: $x_1=\varphi_1(t)$, … , $x_m=\varphi_m(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, $\varphi_1(t)$, … , $\varphi_m(t)$ непрерывны на $[\alpha,\beta]\}$ – непрерывная кривая, соединяющая точки $M_1$ и $M_2$ и целиком принадлежащая $X$. В частности,

$M_1=M_1(\varphi_1(\alpha), \ldots\ \varphi_m(\alpha))$,

$M_2=M_2(\varphi_1(\beta), \ldots\ \varphi_m(\beta))$.

На кривой $L$ имеем $u=f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))\equiv F(t)$.

Сложная функция $F(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$,

$F(\alpha)=f(\varphi_1(\alpha), \ldots\ \varphi_m(\alpha))=f(M_1)=u_1$,

$F(\beta)=f(\varphi_1(\beta), \ldots\ \varphi_m(\beta))=f(M_2)=u_2$.

По соответствующей теореме для функции одной переменной,

$\forall v\in\left[u_1,u_2\right]$ $\exists\gamma\in[\alpha,\beta]$: $F(\gamma)=$v.

Но $F(\gamma)=f(\varphi_1(\gamma), \dots \varphi_n(\gamma))=f(N)$,
где $N = N(\varphi_1(\gamma), \dots \varphi_n(\gamma))\in L$.
Итак, $\forall v \in [u_1, u_2]$ $\exists N\in L$: $f(N)=v$. ■

## 10.4.1. Теорема (1-я Вейерштрасса)

Теорема 01. Предел сходящейся последовательности точек, каждая из которых принадлежит замкнутому множеству $X$, также принадлежит этому множеству $X$.

□ Пусть $M_n \to A$. Тогда в любой ε–окрестности точки $A$ содержится бесконечно много членов этой последовательности и, следовательно, содержатся бесконечно много точек из $X$. Отсюда следует, что либо точка $A$ - внутренняя точка $X$, и тогда она принадлежит этому множеству, как любая внутренняя точка. Либо $A$–граничная точка $X$, и тогда она принадлежит этому множеству, поскольку множество $X$ замкнутое. В любом случае, $A \in X$, что и требовалось доказать. ■

Теорема 1 (Вейерштрасса–1). Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция ограничена на этом множестве.

□ Пусть $f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X$. Предположим, что $f(M)$ не ограничена на $X$. Тогда

$$\forall n\ \exists M_n \in X : \left| f(M_n) \right| > n .$$

Последовательность $f(M_n)$ бесконечно большая, любая ее под–последовательность также бесконечно большая. Последовательность $M_n$ ограничена, так как все ее члены принадлежат ограниченному множеству $X$. Следовательно, из нее можно выделить сходящуюся под–последовательность $M_{k_n} \to M_0$, причем $M_0 \in X$, следовательно, $f(M)$ непрерывна в точке $M_0$. Поэтому $f(M_{k_n}) \to f(M_0)$. С другой стороны, $f(M_{k_n})$ бесконечно большая. Противоречие доказывает, что $f(M)$ ограничена на $X$. ■

**10.4.2.** ***Пример.***

Функция $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$ на $X$ {0<x<1, 0<y<1} непрерывна в любой точке $X$, но не ограничена на $X$.

# 10.5. Точные грани функции.

## 10.5.1. Понятие точной грани

Пусть функция $f(M)$ ограничена сверху на $X$, то есть $\exists A : \forall M \in X$ верно $f(M) \le A$. Любое такое число $A$ называется верхней гранью функции $f(M)$ на $X$.

Определение. Наименьшая из всех верхних граней ограниченной сверху на множестве $X$ функции $f(M)$ называется точной верхней гранью $f(M)$ на этом множестве и обозначается $\sup\limits_{X} f(M)$.

Эквивалентное определение.

Число $U$ называется точной верхней гранью функции $f(M)$ на $X$, если

1) $\forall M \in X$ верно $f(M) \le U$,

2) $\forall \tilde{U} < U \; \exists \tilde{M} \in X$: $f(\tilde{M}) > \tilde{U}$.

Аналогично определяется точная нижняя грань функции.

Лемма 1. Ограниченная сверху функция, определенная на непустом множестве, имеет точную верхнюю грань. □ Самостоятельно, используйте свойства множества значений функции $f(M)$ на $X$. ■

## 10.5.2. Теорема (2-я Вейерштрасса)

Теорема 2. Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает на этом сегменте своих точных граней, верхней и нижней.

□ Пусть $f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X$. Проведем доказательство для точной верхней грани. Пусть

$U = \sup\limits_X f(M)$. Предположим, что $f(M)$ не равна $U$ ни в одной точке множества $X$. Тогда $\forall M \in X$ верно $f(M) < U$. Пусть

$$F(M) = \frac{1}{U - f(M)}.$$

Тогда $F(M) > 0$ и непрерывна на $X$.

По 1-й теорема Вейерштрасса, $F(M)$ ограничена на $X$, то есть $\exists V, \exists W$:

$V \le \dfrac{1}{U - f(M)} \le W$, причем $V \ge 0$, так что

$\dfrac{1}{W} \le U - f(M)$, $f(M) \le U - \dfrac{1}{W}$. Итак, $\forall M \in X$

верно $F(M) < U_1 = U - \dfrac{1}{W} < U$. Это противоречит тому, что число $U$ – наименьшая из верхних граней функции $F(M)$ на $X$. ■

Пример. $f(x,y) = xy(3-x-y)$,

$$X = \left\{ (x,y) : \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x+y \leq 3. \end{cases} \right\}$$

$\forall (x,y) \in X$ верно $f(x,y) \geq 0$,

$U = \sup\limits_X f(M) > 0$, это единственная в области $X$ точка локального экстремума, максимум.

## 10.6. Равномерная непрерывность функции.

Определение 1. Функция $F(M)$ называется равномерно непрерывной на $X$, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall M_1 \in X, \forall M_2 \in X:$

$\rho(M_1, M_2) < \delta$ верно $\left| f(M_2) - f(M_1) \right| < \varepsilon$.

Определение 2. Функция $F(M)$ не является равномерно непрерывной на $X$, если

$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0 \ \ \exists M_1 \in X, \exists M_2 \in X:$

$\rho(M_1, M_2) < \delta \ \cap \left| f(M_2) - f(M_1) \right| \geq \varepsilon$.

Теорема Кантора. Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция равномерно непрерывна на этом множестве. □ ■

Замечание. Если множество не является ограниченным или не является замкнутым, то непрерывная на таком множестве функция может не достигать своих точных граней и не быть равномерно непрерывной на этом множестве.

Пример 1. $f(x,y)=x^2+y^2$ определенная на $D=\{x,y:0<x^2+y^2<1\}$.