Дифференцируемые функции

10.1. Первый дифференциал

10.1.1. *Понятие частной производной.*

Определение 1. Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве $D = \left\{x \in \Omega\left(x_0\right), y = y_0\right\}$. *Частным приращением* функции $f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется функция $\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$.

Определение 2. Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве $D = \left\{x \in \Omega\left(x_0\right), y = y_0\right\}$.

Частной производной функции $f(x,y)$ по переменной x в точке M_0 называется

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется f_y.

Замечание 1. Достаточно потребовать, чтобы $f(x,y)$ была определена на множестве $D=\left\{x\in X\,,y=y_0\right\}$, причем $x_0\in X$ и x_0 есть предельная точка X .

Замечание 2. Можно также усилить требования на $f(x,y)$. Потребуем, чтобы $f(x,y)$ была определена на множестве $D=\Omega\left(M_0\right)$.

Пример 1. Если $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$,

то $f_x = 3x^2 - 3y$, $f_y = 3y^2 - 3x$.

Пример 2. Если $f(x,y) = x^y$, $x > 0$, то

1) $f_x = y \cdot x^{y-1}$, как производная степенной функции,

2) $f_y = x^y \ln x$, как производная показательной функции.

10.1.2. *Дифференцируемые функции*

Определение 3. Функция $f(x,y)$, определенная в некоторой $\Omega\left(M_0\right)$, называется дифференцируемой в точке $M_0(x,y)$, если найдутся такие числа A, B, что полное приращение функции,

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y),$$

может быть представлено в виде

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

при $\rho \to 0$, где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Замечание. Так как $\rho \cdot o(1) = o(\rho)$, то равносильное определение таково:

$\exists A, B : \Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \rho \cdot \alpha(x, y)$,

где $\alpha(x, y) = o(1)$ при $\rho \to 0$.

Теорема 1. Если $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то $\exists f_x(M_0)$, $\exists f_y(M_0)$,

$A = f_x(M_0)$, $B = f_y(M_0)$.

□ Самостоятельно. ■

Контрольный вопрос. Является ли существование $f_x(M_0)$ и $f_y(M_0)$ необходимым условием дифференцируемости или достаточным условием дифференцируемости в точке

$M_0(x_0, y_0)$ функции $f(x,y)$, определенной в $\Omega(M_0)$?

10.1.3. *Дифференциал функции двух переменных*

Определение 4. Дифференциалом дифференцируемой функции $f(x,y)$ называется линейная часть полного приращения функции,

$$df = f_x(M_0)\Delta x + f_y(M_0)\Delta y,$$

или, учитывая, что для независимых переменных $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$,

$$df = f_x(M_0)dx + f_y(M_0)dy.$$

Замечание 1. Для функции, не являющейся дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$, величина $f_x(M_0)dx + f_y(M_0)dy$ не называется дифференциалом (также и в том случае, когда существуют $f_x(M_0)$ и $f_y(M_0)$).

Замечание 2. Дифференциал есть функция удвоенного числа переменных,

$$df(dx, dy \mid x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy .$$

10.1.4. *Другое определение дифференцируемой функции*

Определение 5. Функция $f(M)$, $M = (x_1, ..., x_m)$, называется дифференцируемой в точке $M_0 = \left(x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)}\right)$, если

$$\exists A_1, ..., A_m :$$

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + ... + A_m \Delta x_m + o(\rho), \text{ где}$$

$$\Delta f = f\left(x_1^{(0)} + \Delta x_1, ..., x_m^{(0)} + \Delta x_m\right) - f\left(x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)}\right).$$

Определение 6 (равносильное). Функция $f(M)$ называется дифференцируемой в точке M_0, если $\exists A_1,\dots,A_m$:

$$\Delta f = A_1\Delta x_1 + \dots + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m,$$

причем $\alpha_1 \to 0,\dots,\alpha_m \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0,\dots,\Delta x_m \to 0$.

Замечание. Разница: $o(\rho) = \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m$.

Теорема 1. Оба определения дифференцируемой функции равносильны.

□1. Пусть $\Delta f = A_1\Delta x_1 + \dots + A_m\Delta x_m + R_2$, где

$$R_2 = \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m,$$

причем $\alpha_1 \to 0,\dots,\alpha_m \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0,\dots,\Delta x_m \to 0$.

Обозначим $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_m^2}$. Тогда

$$R_2=\rho\cdot\left[\alpha_1\cdot\left(\frac{\Delta x_1}{\rho}\right)+\ldots+\alpha_m\cdot\left(\frac{\Delta x_m}{\rho}\right)\right].$$

Заметим, что $\dfrac{\Delta x_i}{\rho}=\dfrac{\Delta x_i}{\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_m^2}}$, $\left|\dfrac{\Delta x_1}{\rho}\right|\le 1$.

Поэтому $R_2=\rho\cdot\left[\alpha_1\cdot O(1)+\ldots+\alpha_m\cdot O(1)\right]$

$=\rho\cdot\left[o(1)\cdot O(1)+\ldots+o(1)\cdot O(1)\right]$

$=\rho\cdot\left[o(1)+\ldots+o(1)\right]=\rho\cdot o(1)=o(\rho)$.

Поэтому $\Delta f=A_1\Delta x_1+\ldots+A_m\Delta x_m+\rho\cdot o(1)$ ■

□2. Пусть $\Delta f=A_1\Delta x_1+\ldots+A_m\Delta x_m+\rho\cdot o(1)$.

Тогда $R_2=\rho\cdot o(1)=\dfrac{\rho^2}{\rho}\cdot o(1)$

$$=\frac{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_m^2}{\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_m^2}}\cdot o(1)$$

$$=\Delta x_1\cdot\frac{\Delta x_1}{\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_m^2}}\cdot o(1)+\ldots$$

$$=\Delta x_1\cdot O(1)\cdot o(1)+\ldots\ =\Delta x_1\cdot o(1)+\ldots$$

$$=\alpha_1(M)\cdot\Delta x_1+\ldots+\alpha_m(M)\cdot\Delta x_m,$$

где $\alpha_1\to 0,\ldots,\alpha_m\to 0$ при

$\Delta x_1\to 0,\ldots,\Delta x_m\to 0$.

Поэтому

$\Delta f=A_1\Delta x_1+\ldots+A_m\Delta x_m+\alpha_1\Delta x_1+\ldots+\alpha_m\Delta x_m$ ■

Пример 1. $u=\sqrt{x^2+y^2}$ непрерывна, но не является дифференцируемой в точке $(0;0)$.

□1. $\sqrt{x^2+y^2}=Ax+By+\rho o(1)$,

$\sqrt{x^2} = Ax + |x|o(1)$, $|x| = Ax + |x|o(1)$,

$\dfrac{|x|}{|x|} = A\dfrac{x}{|x|} + \dfrac{|x|}{|x|}o(1)$, ,

$\begin{cases} 1 = A + o(1), \\ 1 = -A + o(1), \end{cases}$ противоречие. ■

□2. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ не имеет частных производных в точке $(0;0)$, так как

$f(x,0) = \sqrt{x^2} = |x|$, $f(0,y) = \sqrt{y^2} = |y|$. ■

Пример 2а. $u = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ имеет частные производные, но не является дифференцируемой в точке $M_0(0;0)$.

Замечание. При $x + y \neq 0$ имеем

$$u_x = \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3 + y^3\right)^2}}, \ \nexists \lim_{\substack{x \to x_0, \\ y \to y_0}} u_x ,$$

$$\nexists \lim_{\substack{x \to x_0, \\ y \to y_0}} \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3 + y^3\right)^2}} .$$

□a) $u_x(0;0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(0+\Delta x, 0) - u(0,0)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3 + 0^3} - \sqrt[3]{0^3 + 0^3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 .$$

Аналогично $u_y(0;0) = 1$,

□b) Проверим справедливость равенства

$$f(M) = f_x(M_0)\Delta x + f_y(M_0)\Delta y + o(\rho),$$

$$\sqrt[3]{x^3+y^3}=x+y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$=x+y+\sqrt{x^2+y^2}\,o(1),$$

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=o(1),\ \ y=kx,$$

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+k^3x^3}-x-kx}{\sqrt{x^2+k^2x^2}}=o(1),$$

$$\frac{\sqrt[3]{1+k^3}-1-k}{\sqrt{1+k^2}}\neq o(1). \ \blacksquare$$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=o(1),\ \ x=\rho\cos\varphi,$

$y=\rho\sin\varphi,$

$$\frac{\sqrt[3]{\rho^3\cos^3\varphi+\rho^3\sin^3\varphi}-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}$$

$$=o(1),$$

$$\frac{\sqrt[3]{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}-\cos\varphi-\sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}}\neq o(1). \blacksquare$$

Пример 2б. $u=\sqrt[3]{x^2y}$ имеет частные производные, но не является дифференцируемой в точке $M_0(0;0)$.

Замечание. При $xy\neq 0$ имеем $u_x=\dfrac{2xy}{3\sqrt[3]{\left(x^2y\right)^2}}$,

$$\nexists\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} u_x,\ \nexists\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}}\frac{2xy}{3\sqrt[3]{\left(x^2y\right)^2}}.$$

Пример 3. Найдите дифференциал функции $u(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

□ Функция дифференцируема как композиция дифференцируемых функций,

$du=u_x dx+u_y dy$, $u_x=3x^2-3y$, $u_y=3y^2-3x$,

$du=\left(3x^2-3y\right)dx+\left(3y^2-3x\right)dy$. ■

Пример 4. Найдите дифференциал функции $u(x,y)=x^3+y^3-3xy$ в точке $M_0=(2;3)$.

□ $du=(3x^2-3y)dx+(3y^2-3x)dy$,

$du=(3\cdot 2^2-3\cdot 3)dx+(3\cdot 3^2-3\cdot 2)dy$,

$du=3dx+21dy$. ■

Пример 5. Найдите дифференциал функции $u(x,y)=x^3+y^3-3xy$ в точке $M_0=(1;1)$.

□ $du=(3x^2-3y)dx+(3y^2-3x)dy$,

$du=0dx+0dy=0$. ■

Пример 6. Найдите дифференциал функции $u(x,y,z)=x^{y^2 z}$.

□ $du=u_x dx+u_y dy+u_z dz$, $u_x=y^2 z x^{y^2 z-1}$,

$u_y=x^{y^2 z}\ln x\cdot 2yz$, $u_z=x^{y^2 z}\ln x\cdot y^2$,

$du=y^2 z x^{y^2 z-1}dx+2x^{y^2 z}yz\ln x dy+y^2 x^{y^2 z}\ln x dz$.

■

Пример 7. Найдите дифференциал функции $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2-y^2}$. □ Заметим, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-2yx}{(x^2-y^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2},$$

$df=-\dfrac{2xy}{(x^2-y^2)}dx+\dfrac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}dy$ при $x^2-y^2\neq 0$. ■

10.1.5. *Непрерывность дифференцируемой функции*

Теорема 2 (о непрерывности дифференцируемой функции). Если $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то $f(x,y)$ непрерывна в $M_0(x_0,y_0)$.

□ Достаточно доказать, что полное приращение $\Delta f \to 0$ при Δx, $\Delta y \to 0$. Имеем $\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \rho o(1) \to 0$, поскольку A и B – числа, а Δx, Δy, $\rho \to 0$ при Δx, $\Delta y \to 0$. ■

10.1.6. *Достаточное условие дифференцируемости*

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости). Если f_x и f_y определены в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, f_x и

f_y непрерывны в M_0, то $f\left(x,y\right)$ дифференцируема в M_0.

□ $\Delta f = f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)$

$= f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) - f\left(x_0, y_0+\Delta y\right)$

$+ f\left(x_0, y_0+\Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)$.

Используем формулу конечных приращений,

$\Delta f = f_x\left(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y\right)\cdot\Delta x$

$+ f_y\left(x_0, y_0+\lambda\Delta y\right)\cdot\Delta y,\ 0<\theta<1,\ 0<\lambda<1.$

Используем непрерывность f_x и f_y в M_0,

$\Delta f = \left(f_x\left(x_0, y_0\right)+o\left(1\right)\right)\cdot\Delta x$

$+\left(f_y\left(x_0, y_0\right)+o\left(1\right)\right)\cdot\Delta y$

$\Delta f = f_x\left(x_0, y_0\right)\cdot\Delta x + \alpha\left(x,y\right)\cdot\Delta x$

$+ f_y\left(x_0, y_0\right)\cdot\Delta y + \beta\left(x,y\right)\cdot\Delta y$. ■

Пример (существование частных производных в точке не влечет дифференцируемость функции в этой точке). Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$ и точку

$M_0(0,0)$. Заметим, что частные приращения $\vartriangle_x f$, $\vartriangle_y f$ равны нулю в точке $M_0(0,0)$, например,

$$\vartriangle_x f=\left.\frac{(x+\Delta x)y}{(x+\Delta x)^2+y^2}-\frac{xy}{x^2+y^2}\right|_{x=y=0}=0\,.$$

Поэтому $f_x=0$, $f_y=0$ в точке $M(0,0)$.

Покажем теперь, что данная функция разрывна в точке $M(0,0)$. Считая $x=y\neq 0$, получим

$f(x,x)=\dfrac{1}{2}$ и при $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f(x,x)=\dfrac{1}{2}$ а если бы функция была непрерывна,

то $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f(x,x) = f(0,0) = 0$.

10.1.7. Правила дифференцирования

Теорема 1. Пусть функции $U(M)$ и $V(M)$ дифференцируемы в точке M_0. Тогда

1) $d(cU) = cdU, \quad c = const$,
2) $d(UV) = dU \cdot V + U \cdot dV$,
3) $d(U \pm V) = dU \pm dV$,
4) $d\left(\dfrac{U}{V}\right) = \dfrac{dU \cdot V - U \cdot dV}{V^2}$ при $V \neq 0$.

10.2. Производная сложной функции.

10.2.1. М-03. 22 февраля 2013

10.2.2. Понятие сложной функции.

$u = f(x_1, \ldots x_m)$,

$$x_1 = \phi_1(t_1,\dots,t_k),\ \dots,\ x_m = \phi_m(t_1,\dots,t_k).$$

Пример 1. $u(r,\varphi) = r\cos\varphi$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ x>0,\ \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f(x,y) = u\big(r(x,y),\varphi(x,y)\big)$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}}$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}} = x.$$

Пример 2. $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $x(t)=tV_0\cos\varphi$,

$$y(t)=tV_0\sin\varphi-g\frac{t^2}{2},$$

$$R(t)=u(x(t),y(t)),\ \frac{dR}{dt}=\frac{1}{R}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right),$$

$$B=tV_0\cos\varphi\cdot V_0\cos\varphi$$

$$+\left(tV_0\sin\varphi-g\frac{t^2}{2}\right)\left(V_0\sin\varphi-gt\right)$$

$$=tV_0{}^2\cos^2\varphi$$

$$+tV_0{}^2\sin^2\varphi-t^2gV_0\sin\varphi-g\frac{t^2}{2}V_0\sin\varphi+g^2\frac{t^3}{2}$$

$$=tV_0{}^2-\frac{3}{2}t^2gV_0\sin\varphi+g^2\frac{t^3}{2}$$

$$=\frac{t}{2}\left(2V_0{}^2-3tgV_0\sin\varphi+g^2t^2\right),$$

$$D=\left(3gV_0\sin\varphi\right)^2-8V_0^{\,2}g^2\ =g^2V_0^{\,2}\left(9\sin^2\varphi-8\right),$$

Точка экстремума имеется при условии

$$\sin\varphi>\sqrt{\frac{8}{9}}.$$

10.2.3. Функции малой размерности

Теорема 2а (о дифференцировании сложной функции типа $1\to2\to1$). Пусть $f(x,y)$ определена в $\Omega\left(M_0\right)$ и дифференцируема в точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$. Пусть функции $x\left(t\right)$ и $y\left(t\right)$ определены в $\Omega\left(t_0\right)$ и дифференцируемы в точке t_0, причем $M_0\left(x_0,y_0\right)=\left(x\left(t_0\right),y\left(t_0\right)\right)$.

Тогда сложная функция $U(t)=f\left(x(t),y(t)\right)$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$U_t=f_xx_t+f_yy_t,\ dU=\left(f_xx_t+f_yy_t\right)dt.$$

Замечание. Условие « $f(x,y)$ определена в $\Omega(M_0)$» можно снять, так как оно заложено в определении дифференцируемой функции. В дальнейшем всегда считаем это условие выполненным для каждой дифференцируемой функции.

Теорема 2b (о дифференцировании сложной функции типа $2 \to 2 \to 1$). Пусть $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, x и y являются дифференцируемыми функциями переменных t и s в точке $T_0(t_0,s_0)$, $M_0(x_0,y_0)=\left(x(t_0,s_0),y(t_0,s_0)\right)$. Тогда сложная функция $U(t,s)=f\left(x(t,s),y(t,s)\right)$ дифференцируема в точке $T_0(t_0,s_0)$, причем $U_t = f_x x_t + f_y y_t$, $U_s = f_x x_s + f_y y_s$, или

$$dU = \left(f_x x_t + f_y y_t \right) dt + \left(f_x x_s + f_y y_s \right) ds .$$

10.2.4. *Главная теорема о сложной функции*

Пусть $U\left(t_1,...,t_k\right) = f(x_1,\ldots,x_m)$, где $x_1 = \phi_1(t_1,\ldots,t_k),...,\ x_m = \phi_m(t_1,\ldots,t_k)$.

Теорема 3 (о дифференцировании сложной функции) Пусть

1) функция $u = f(x_1,\ldots x_m)$ дифференцируема в $M_0(x_1^0,\ldots,x_m^0)$,

2) Функции $x_1 = \phi_1\left(t_1,...,t_k\right),...,x_m = \phi_m\left(t_1,...,t_k\right)$ дифференцируемы в точке $P_0(t_1^0,\ldots,t_k^0)$,

3) причем $x_1^0 = \phi_1(t_1^0,\ldots t_k^0),\ldots,\ x_m^0 = \phi_m(t_1^0,\ldots t_k^0)$.

Тогда функция $U\left(t_1,...,t_k\right) = f(x_1,...,x_m)$ дифференцируема в точке $P_0(t_1^0,\ldots,t_k^0)$, и

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\dfrac{\partial x_m}{\partial t_1}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial t_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\dfrac{\partial x_m}{\partial t_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial U}{\partial t_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial x_1}{\partial t_k} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial x_2}{\partial t_k} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\dfrac{\partial x_m}{\partial t_k}. \end{cases}$$

☐ Так как $f(x_1,\dots,x_m)$ дифференцируема в точке M_0, то

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_m}\Delta x_m$$

$$+\alpha_1\cdot\Delta x_1 + \cdots + \alpha_m\cdot\Delta x_m,$$

причем $\alpha_1(M),\dots,\alpha_m(M)\to 0$ при $\Delta x_1\to 0,\dots,\Delta x_m\to 0$.

Так как $x_j = \phi_j(t_1^0,\dots t_k^0)$ дифференцируемы в точке P_0, то

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1}\Delta t_1 + \dots + \dfrac{\partial x_1}{\partial t_k}\Delta t_k + \rho \cdot \beta_1(N), \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ \Delta x_m = \dfrac{\partial x_m}{\partial t_1}\Delta t_1 + \dots + \dfrac{\partial x_m}{\partial t_k}\Delta t_k + \rho \cdot \beta_m(N), \end{cases}$$

где $\rho = \sqrt{\Delta t_1^2 + \ldots + \Delta t_k^2}$ и $\beta_j(N) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Подставим выражения $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m$, получим $\Delta U = A_1\Delta t_1 + \dots + A_k\Delta t_k + \rho \cdot \gamma(N)$, где

$$A_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1}, \ldots,$$

$$A_k = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k},$$

$$\gamma(N) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \left(\rho \cdot \beta_1(N)\right) +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \alpha_1(M) \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} \Delta t_1 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} \Delta t_k + \rho \cdot \beta_1(N) \right) +$$

$$\ldots \quad + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x_m} \cdot \left(\rho \cdot \beta_m(N)\right) + + \frac{1}{\rho} \alpha_m(M)$$

$$\cdot \left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1} \Delta t_1 + \cdots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \Delta t_k + \rho \cdot \beta_m(N) \right),$$

Поэтому $\gamma(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Таким образом, $U(t_1,\ldots,t_k)$ дифференцируема в точке P_0 и $A_i = \dfrac{\partial U}{\partial t_i}$, $i = \overline{1,k}$ ■

10.2.5. М-04. 24 февраля 2011

10.3. Производная по направлению, градиент.

10.3.1. Производная по направлению на плоскости

Пусть $\vec{l} = (l_x, l_y)$ – единичный вектор, $\left|\vec{l}\right| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = 1$.

Пусть также функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Определение 1а. *Производной функции* $f(x,y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ по *направлению* *вектора* $\vec{l}$ называется $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \left.\dfrac{dg}{dt}\right|_{t=0}$, где $g(t) = f\left(x_0 + t \cdot l_x, y_0 + t \cdot l_y\right)$.

Определение 2б (равносильное). *Производной функции* $f(x,y)$ *в точке* $M_0(x_0,y_0)$ по *направлению вектора* $\vec{l}$ называется

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot l_x, y_0 + t \cdot l_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Замечание. Требования на $f(x,y)$ можно ослабить.

Теорема 1. Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = f_x(M_0)\cdot l_x + f_y(M_0)\cdot l_y, \text{ или}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = f_x \cos\alpha + f_y \cos\beta, \text{ где } \vec{l} = (\cos\alpha; \cos\beta).$$

10.3.2. *Градиент*

Определение 3. *Градиентом* дифференцируемой функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется вектор $\operatorname{grad} f = \left(f_x, f_y\right)$.

Замечание. Если $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет частные производные, но не является дифференцируемой, то понятие градиента в данной точке не применяется.

10.3.3. *Производная по направлению и градиент*

Теорема 2. 1) Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке M_0, то

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \left(\operatorname{grad} f\left(M_0\right), \vec{l}\right)$, где в правой части находится скалярное произведение соответствующих векторов, причем вектор направления – единичный.

2) Производная по направлению достигает своего наибольшего значения, равного $\|\operatorname{grad} f\| = \sqrt{\left(f_x\right)^2 + \left(f_y\right)^2}$, при условии что $\vec{l} \parallel \operatorname{grad} f$ (и векторы сонаправлены).

3) Производная по направлению достигает своего наименьшего значения, равного $-\|\operatorname{grad} f\| = -\sqrt{\left(f_x\right)^2 + \left(f_y\right)^2}$, при условии что $\vec{l} \uparrow\downarrow \operatorname{grad} f$ (и векторы противонаправлены). 4) Производная по направлению равна нулю при условии $\vec{l} \perp \operatorname{grad} f$. □ Теорема вы-

текает из теоремы 2а,

$$g(t) = f\left(x_0 + t\cdot l_x, y_0 + t\cdot l_y\right),$$

$$g_t = f_x\left(x_0 + t\cdot l_x, y_0 + t\cdot l_y\right)\left(x_0 + t\cdot l_x\right)_t$$

$$+ f_y\left(x_0 + t\cdot l_x, y_0 + t\cdot l_y\right)\left(y_0 + t\cdot l_y\right)_t \text{ при } t = 0,$$

$x = x_0$ и $y = y_0$. ■

10.3.4. *Производная по направлению в пространстве*

Определение 1. Если $f(x, y, z)$ определена в некоторой $\Omega(M_0)$ и дифференцируема в точке M_0, то градиентом называем вектор

$$\operatorname{grad} f = \left(f_x, f_y, f_z\right) \text{ в точке } M_0.$$

Более подробно, Градиентом функции в точке М называется вектор

$$\operatorname{grad} U(M) =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}(M)\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}(M)\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}(M)\vec{k},$$

$$\operatorname{grad} U(M) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Рассмотрим единичный вектор $\vec{a} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, где α, β, γ - углы образованные вектором $\vec{a}$ с координатными осями декартовой системы координат. Пусть $x = x_0 + t\cos\alpha$, $y = y_0 + t\cos\beta$, $z = z_0 + t\cos\gamma$.

Пусть $f(x, y, z)$ определена в некоторой $\Omega\left(M_0\right)$ и дифференцируема в точке M_0.

Функция

$$U\left(t\right) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$$

представляет собой сложную функцию параметра t. По теореме о дифференцировании сложной функции,

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma .$$

Производная по направлению равна

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{a}}=\left(\operatorname{grad}U,\vec{a}\right) =|\,gradU(M)\,|\cdot|\,\vec{a}\,|\cdot\cos\varphi ,$$

где φ есть угол, образованный вектором градиента и вектором $\vec{a}$.

10.4. *Касательная плоскость*

10.4.1. *Понятие*

Определение 1 (через угол между плоскостью и хордой). Пусть $f(x,y)$ определена на множестве D пространства R^2 и точка $M_0(x_0,y_0)$ является внутренней точкой D.

Пусть $G = \{x, y, z\} : z = f(x, y), (x, y) \in D$.

Плоскость Φ, заданная уравнением

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$,

проходящая через точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$, называется касательной плоскостью к множеству G, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall P \in G : 0 < \rho(P, P_0) < \delta$ верно

$\operatorname{angle}(\Phi, \overrightarrow{P_0P}) < \varepsilon$.

Определение 2 (через нормаль, равносильное). $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall P \in G\ : 0 < \rho(P, P_0) < \delta$

верно $\left| \dfrac{(\vec{N}, \overrightarrow{PP_0})}{|\vec{N}| |\overrightarrow{PP_0}|} \right| < \varepsilon$, где $\vec{N} = (A, B, C)$ – вектор нормали к Φ.

10.4.2. *Теорема о касательной плоскости*

Теорема 1. Если касательная плоскость существует, то она единственная.

Теорема 2. Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то в этой точке существует касательная плоскость к поверхности $z=f(x,y)$, которая задается уравнением

$$z-f(M_0)=(x-x_0)f_x(M_0)$$
$$+(y-y_0)f_y(M_0).$$

☐ Найдем $\dfrac{(\vec{N},\overrightarrow{MM_0})}{\left|\vec{N}\right|\left|\overrightarrow{MM_0}\right|}$.

Запишем определение дифференцируемой функции (Тейлора-Пеано-1)

$$f\left(x,y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+\left(x-x_0\right)f_x\left(x_0,y_0\right)$$

$$+\left(y-y_0\right)f_y\left(x_0,y_0\right)+\rho\cdot\alpha\left(M\right),$$

$$\Delta z=f_x\Delta x+f_y\Delta y+\rho\cdot\alpha\left(M\right),$$

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\left(\Delta x,\Delta y,\Delta z\right),$$

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\left(\Delta x,\Delta y,f_x\Delta x+f_y\Delta y+\rho\cdot\alpha\left(M\right)\right),$$

$$\overrightarrow{N}=\left(f_x\left(M_0\right),f_y\left(M_0\right),-1\right),$$

$$\left(\overrightarrow{N},\vec{r}-\vec{r}_0\right)=f_x\Delta x+f_y\Delta y-f_x\Delta x-f_y\Delta y$$

$$+\rho\cdot\alpha\left(M\right),$$

$$\left(\overrightarrow{N},\vec{r}-\vec{r}_0\right)=\rho\cdot\alpha\left(M\right),$$

$$\left|\overrightarrow{N}\right|=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1},$$

$$\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right| =$$

$$= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \left(f_x \Delta x + f_y \Delta y + \rho \cdot \alpha(M) \right)^2} ,$$

$$\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right| \geq \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} ,$$

$$\frac{\left(\overrightarrow{N}, \vec{r}-\vec{r}_0\right)}{\left|\overrightarrow{N}\right| \cdot \left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|} \leq \frac{\rho \cdot \alpha(M)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} ,$$

$$= \frac{\alpha(M)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} = \beta(M) . \blacksquare$$

10.4.3. *Касательная к линии*

1) Пусть $f(x)$ –дифференцируемая функция. Уравнение касательной к линии $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$, имеет вид

$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) .$$

2) Пусть $F(x,y)$ –дифференцируемая функция. Если $F_x^{\,2}+F_y^{\,2}>0$, то уравнение касательной к линии уровня $F(x,y)=C$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид

$$F_x\left(M_0\right)\left(x-x_0\right)+F_y\left(M_0\right)(y-y_0)=0.$$

3) Уравнение касательной к линии $x=x(t)$, $y=y(t)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид $\left(\vec{N},\vec{r}-\vec{r}_0\right)=0$, где $\vec{r}=(x,y)$, $\vec{r}_0=(x_0,y_0)$, $\vec{N}=\left(y_t;-x_t\right)$.

Равносильно:

$$\left(x-x_0\right)y_t\left(M_0\right)-\left(y-y_0\right)x_t\left(M_0\right)=0,$$

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_t\left(M_0\right)}{x_t\left(M_0\right)},\ x-x_0=s\cdot x_t\left(M_0\right),$$

$$y-y_0=s\cdot y_t\left(M_0\right).$$

10.4.4. *Касательная к поверхности*

1) Пусть $f\left(x,y\right)$–дифференцируемая функция. Уравнение касательной плоскости к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, где $z_0=f(x_0,y_0)$, имеет вид

$$z=z_0+f_x\left(x-x_0\right)+f_y(y-y_0).$$

2) Пусть $F\left(x,y,z\right)$–дифференцируемая функция. Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x,y,z)=C$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, где $F(x_0,y_0,z_0)=C$, имеет вид

$F_x\left(x-x_0\right)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$ при условии
$F_x^{\,2}+F_y^{\,2}+F_z^{\,2}>0$. В частности, если поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ является уравнением касательной к поверхности
$F\left(x,y,z\right)=z-f(x,y)=0$,
имеет вид $f_x\left(x-x_0\right)+f_y(y-y_0)-(z-z_0)=0$,
или $z=z_0+f_x\left(x-x_0\right)+f_y(y-y_0)$.

3) Уравнение касательной плоскости к поверхности $x=x\left(t,s\right)$, $y=y\left(t,s\right)$, $z=z\left(t,s\right)$ в точке $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ имеет вид $\left(\vec{N},\vec{r}-\vec{r}_0\right)=0$,

где $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{N}=\left[\vec{r}_t,\vec{r}_s\right]$,

$\vec{r}_t = (x_t, y_t, z_t)$, $\vec{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$, при условии $[\vec{r}_t, \vec{r}_s] \neq 0$. Все функции предполагаются дифференцируемыми.

Пример 1. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = xy$ в точке $M_0(2;3;6)$.

□ Заметим, что $z_x = y$, $z_y = x$, а в заданной точке M_0 имеем $z_x\big|_{M_0} = 3$, $z_y\big|_{M_0} = 2$.

Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид

$z - 6 = 3(x-2) + 2(y-3)$, $z = 3x + 2y - 6$.

Уравнение нормали к касательной плоскости в данной точке имеет вид $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-6}{-1}$, или $x = 2 + 3t$, $y = 3 + 2t$, $z = 6 - t$. ■

Пример 2. Найдите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в точке $M_0(1;\,1;-1)$.

□ Заметим, что $z_x = 3x^2 - 3y$, $z_y = 3y^2 - 3x$, в заданной точке $M_0(1;1;-1)$ $z_x\big|_{M_0} = 0$,

$z_y\big|_{M_0} = 0$.

Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид $z + 1 = 0$. Уравнение нормали к касательной плоскости в данной точке имеет вид $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+1}{-1}$,

или $x = 1$, $y = 1$, $z = -1 + t$. ■

Пример 3. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2 - 2xy - x + 2y$ в точке $M_0(1;1;1)$.

□ Заметим, что в произвольной точке

$z_x = 2x - 2y - 1,\ z_y = -2x + 2y + 2$,

в заданной точке $M_0(1;1;1)$ $z_x\big|_{M_0} = -1$,

$z_y\big|_{M_0} = 2$. Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид $z - 1 = -(x-1) + 2(y-1)$, или $x - 2y + z = 0$. Уравнение нормали к касательной плоскости в данной точке

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}. \ \blacksquare$$

Пример 3а. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 = 4xyz - 1$ в точке $M_0(1;1;1)$.

$\square$ $d\left(x^3 + y^3 + z^3 - 4xyz + 1\right) = 0$,

$$dx(3x^2 - 4yz) + dy(3y^2 - 4xz)$$
$$+dz(3z^2 - 4xy) = 0,$$

$$(x-x_0)(3x_0^{\ 2}-4y_0z_0)+$$

$$+(y-y_0)(3y_0^{\ 2}-4x_0z_0)=0,$$

в указанной точке

$$(x-1)(-1)+(y-1)(-1)+(z-1)(-1)=0,$$

$$(x-1)+(y-1)+(z-1)=0,$$

$$x+y+z=3. \blacksquare$$

Пример 4. Найдите производную функции

$$f(x,y,z)=y^2z-2xyz+z^2$$

в точке $M_0(3;1;1)$ в направлении луча , который образует с координатными осями острые углы α, β, γ, причем $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$.

$\square$ $\cos^2\alpha=\cos^2\pi/3=¼$; $\cos^2\beta=\cos^2\pi/4=½$.

Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, а угол γ острый, то

$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 – ¼ - ½ = ¼$,

$\cos\gamma = ½$.

Вычисляем частные производные,

$f_x = - 2yz$,

$f_y = 2yz - 2zx$,

$f_z = y2 - 2xy + 2z$,

$f_x (M) = - 2$,

$f_y (M) = - 4$,

$f_z (M) = - 3$.

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{l}} = (-2)\cdot\frac{1}{2} + (-4)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + (-3)\cdot\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{l}} = -\frac{5+4\sqrt{2}}{2}.$$

10.5. *Приближенные вычисления с помощью первого дифференциала*

Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$. Запишем приращение функции в виде $f(x+\Delta x, y+\Delta y) = P_1 + R_2$, где

$$P_1(x+\Delta x, y+\Delta y \,|\, x, y)$$

$$= f + df = f(x,y) + f_x(x,y)\vartriangle x + f_y(x,y)\vartriangle y,$$

Оценкой первого порядка для $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ называется выражение $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y \,|\, x, y)$.

Иначе,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x\Delta x + f_y\Delta y.$$

Впоследствии мы получим семейство формул Тейлора,

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = P_n + R_{n+1}$, где

$P_0 = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$,

$$P_1 = f + df,$$

$$P_2 = f + df + \frac{1}{2}d^2 f,$$

$$P_3 = f + df + \frac{1}{2}d^2 f + \frac{1}{6}d^3 f,$$

$$P_n = f + df + \frac{1}{2}d^2 f + \frac{1}{6}d^3 f + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f\ ,$$

$$P_1 = f(x,y) + f_x(x,y)\vartriangle x + f_y(x,y)\vartriangle y\,,$$

$$P_2 = f(x,y) + f_x \vartriangle x + f_y \vartriangle y +$$

$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}\vartriangle x^2 + 2 f_{xy}\vartriangle x \vartriangle y + f_{yy}\vartriangle y^2 \right).$$

Приближенная формула для $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx P_n(x+\Delta x, y+\Delta y \,|\, x, y)\,.$$

Оценкой погрешности мы займемся позднее.

Пример. Вычислите приближенно с помощью первого дифференциала значение

$$A = \sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}\,.$$

□ Пусть $f(x,y,z) = \sqrt{x^y + \ln z}$,

$x = 1$, $y = 2$, $z = 1$,

$\vartriangle x = 0,04$, $\vartriangle y = -0,01$, $\vartriangle z = 0,02$,

$x+\vartriangle x=1,04$, $y+\vartriangle y=1,99$, $z+\vartriangle z=1,02$,

Найдем значение функции в центральной точке, $f(x,y,z)=\sqrt{1^2+\ln 1}=1$,

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y\cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{2\cdot 1}{2\sqrt{1}}=1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^y\ln x}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{1}{2},$$

$$du=0,04\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-0,01\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+0,02\cdot\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$=1\cdot 0,04-0\cdot 0,01+\frac{1}{2}\cdot 0,02$$

$$=0,04+0,01=0,05,$$

$A=\sqrt{1,04^{1,99}+\ln 1,02}$

$\approx u(1,2,1)+du=1+0,05=1,05$.

Точное значение этого выражения: 1,049275….

10.6. Однородные функции нескольких переменных. Формула Эйлера.

Определение. Функция $z=f\left(x,y\right)$, определенная в некоторой открытой области, называется *однородной* степени α, если она удовлетворяет равенству $f\left(tx,ty\right)=t^{\alpha}f\left(x,y\right)$ для всех $t>0$.

Степень однородности может быть любым действительным числом.

Функция $x^{\pi}\cdot\sin\dfrac{x}{y}+y^{\pi}\cdot\cos\dfrac{x}{y}$ является однородной степени π.

Любая однородная функция степени α представима в виде $f(x,y)=x^{\alpha}g\left(\frac{y}{x}\right)$, где g – произвольная функция.
Например, функция

$$f(x,y)=x\cdot\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y}\cdot\ln\frac{x}{y}$$

$$=x^2\cdot\frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}}{1-\frac{y}{x}}\cdot\left(-\ln\frac{y}{x}\right)$$

однородна степени 2.
Пусть $z=f(x,y)$ однородная функция степени α. Тогда дифференцируя определяющее равенство по t, получим
$f'_x(tx_0,ty_0)\cdot x_0+f'_y(tx_0,ty_0)\cdot y_0=\alpha t^{\alpha\text{-}1}f(x_0,y_0)$.

Полагая в этом равенстве $t = 1$, получим
$f'_x(x_0, y_0) \cdot x_0 + f'_y(x_0, y_0) \cdot y_0 = \alpha f(x_0, y_0)$.
Таким образом, дифференцируемая однородная функция удовлетворяет *соотношению однородности Эйлера*:
$f'_x(x_0, y_0) \cdot x_0 + f'_y(x_0, y_0) \cdot y_0 = \alpha f(x_0, y_0)$.
Верно и обратное утверждение.
Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет формуле Эйлера.
Рассмотрим функцию от t ($t>0$),

$$\varphi(t) = \frac{f(tx_0, ty_0)}{t^\alpha}.$$

Она определена и непрерывна при всех значениях $t>0$.
Вычислим ее производную по переменной t,

$$\varphi'(t) = \frac{\left[f_x'(tx_0, ty_0)x_0 + f_y'(tx_0, ty_0)y_0 \right] t^{\alpha}}{t^{2\alpha}}$$

$$- \frac{f(tx_0, ty_0)\alpha t^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} = 0,$$

поскольку на основании формулы Эйлера, примененной к точке (tx_0, ty_0), числитель последней дроби равен нулю. Значит, функция $\varphi(t) = c = \text{const}$. Для определения числа c положим $t = 1$:

$c = f(x_0, y_0)$, значит, $f(x_0, y_0) = \dfrac{f(tx_0, ty_0)}{t^{\alpha}}$ или

$f(tx_0, ty_0) = t^{\alpha} f(x_0, y_0)$, т.е. функция $f(x, y)$ однородна степени α.