10. Формула Тейлора

10.1. Частные производные высших порядков.

10.1.1. Понятие частных производных

Определение 1. Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве $D_1=\left\{x\in\Omega\left(x_0\right), y=y_0\right\}$ и имеет производную $f_x(x,y)$ на множестве

D_1. Если функция $f_x(x,y)$ в точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$ имеет частную производную по переменной x, то эта частная производная называется частной производной второго порядка и обозначается $f_{xx}\left(M_0\right)$.

Определение 2. Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве G_2, которое является окрестностью каждой точки множества $D_2=\left\{x=x_0, y\in\left[y_0-\delta_1, y_0+\delta_2\right]\right\}$, $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, и имеет производную $f_x(x,y)$ на множестве D_2. Если функция $f_x(x,y)$ в точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$ имеет частную производную по переменной y, то эта частная производная называется смешанной частной производной второго порядка и обозначается $f_{xy}\left(M_0\right)$.

Определение 3. Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве $D_3 = \left\{x = x_0, y \in \Omega\left(y_0\right)\right\}$ и имеет частную производную $f_y(x,y)$ на множестве D_3. Если функция $f_y(x,y)$ в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$ имеет частную производную по переменной y, то эта частная производная называется частной производной второго порядка и обозначается $f_{yy}\left(M_0\right)$.

Замечание 1. Производная функции $f_x(x,y)$ по переменной y обозначается $f_{xy}(x,y)$ или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Замечание 2. Аналогично определяются производные третьего и других порядков.

Определение 2. Производные f_{xy}, f_{yx}, f_{xyx}, f_{xyz} и т.д. называются смешанными.

Замечание 3. В дальнейшем мы будем предполагать, что функция $f(x,y)$ определена на множестве $D=\Omega\left(M_0\right)$, $M_0\left(x_0,y_0\right)$.

Теорема 1. Если функция $f(x,y)$ и ее частные производные f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} определены в некоторой окрестности точки M, причем f_{xy} и f_{yx} непрерывны в точке M, то

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$, т.е. результат повторного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Теорема 2. Пусть функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в некоторой точке $M_0(x_0,y_0)$. Тогда $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ в M_0.

$\square$ Пусть $\Phi = f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0)$

$-f(x_0, y_0+h) + f(x_0, y_0)$,

$\phi(x) = f(x, y_0+h) - f(x, y_0)$,

$\Phi = \Delta\phi = \phi(x_0+h) - \phi(x_0) \;\; = \phi'_x(x_0+\theta h)\cdot h$

$= [f'_x(x_0+\theta h, y_0+h) - f'_x(x_0+\theta h, y_0)]\cdot h$, где $0<\theta<1$.

$$\Phi = \left[\left(f_x\right)_y\left(x_0+\theta h, y_0+\mu h\right)\right]\cdot h^2$$

$$\Phi = \left[\left(f_x\right)_y\left(x_0, y_0\right)+o\left(1\right)\right]\cdot h^2,$$

$$\Phi = \left[\left(f_y \right)_x \left(x_0, y_0 \right) + o\left(1\right) \right] \cdot h^2 ,$$

$$\left(f_x \right)_y \left(x_0, y_0 \right) + o\left(1\right) = \left(f_y \right)_x \left(x_0, y_0 \right) + o\left(1\right) \blacksquare$$

10.2. Дифференциал второго порядка

10.2.1. Напомним правила дифференцирования

Пусть функции $f\left(M\right)$ и $g\left(M\right)$ определены на множестве $D = \Omega\left(M_0\right)$ и дифференцируемы в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$. Тогда следующие функции также дифференцируемы в указанной точке,

$$d\left(f \pm g\right) = df \pm dg ,$$

$$d\left(fg\right) = f \cdot dg + g \cdot df ,$$

$$d\frac{f}{g}=\frac{g\cdot df-f\cdot dg}{g^{2}}$$ при $g(M)\neq 0$.

При очевидных предположениях верны также формулы

$$d(f^{g})=g\cdot f^{g-1}df+f^{g}\cdot\ln f\cdot dg,$$

$$d(fgh)=fg\cdot dh+fh\cdot dg+gh\cdot df.$$

10.2.2. *Две переменные, общий случай*

Определение 1. Если первый дифференциал $df\left(x,y\,|\,dx,dy\right)$ функции $f(x,y)$ является дифференцируемой функцией в данной точке M, то функция $f(x,y)$ называется дважды дифференцируемой в точке M. В этом случае вторым дифференциалом называется дифференциал от первого дифференциала. Найдем значение второго дифференциала функции двух переменных,

$$d^2 f = d(df) = d\left(f_x dx + f_y dy\right),$$

$$d\left(f_x\right) = f_{xx}dx + f_{xy}dy\,,\ d\left(f_y\right) = f_{yx}dx + f_{yy}dy\,,$$

$$d(dx) = d^2 x\,,\ dx \cdot dx = dx^2,$$

$$d^2 f = f_{xx}dxdx + f_{xy}dxdy + f_{yx}dydx + f_{yy}dydy$$

$$+ f_x d\left(dx\right) + f_y d\left(dy\right),$$

$$d^2 f = f_{xx}dx^2 + 2 f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$$

$$+ f_x d^2 x + f_y d^2 y\,.$$

В дальнейшем предполагаем все функции определены на множестве $D = \Omega\left(M_0\right)$, $M_0\left(x_0, y_0\right)$, и дифференцируемыми нужное число раз.

10.2.3. *Две независимые переменные*

Для независимых переменных x и y по определению $d^2 x = 0$, $d^2 y = 0$, поэтому

$$d^2 f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2.$$

Пример 1. $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}.$

□ $$f_x = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$f_y = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f_{xx} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$f_{yx} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$f_{xy} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \quad f_{yy} = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}. \ ■$$

10.2.4. *Оператор дифференцирования первого порядка*

$$d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy \,,$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \,,\quad df = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right) f \,,$$

10.2.5. *Оператор дифференцирования второго порядка*

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 ,$$

$$d^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 \,,$$

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f \,,$$

$$d^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2 \right) f \ ,$$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \,,$$

10.2.6. *Векторно-матричные обозначения дифференциала первого порядка*

Рассмотрим сначала $f(x, y)$. Пусть $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – вектор–столбец, $dX = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$. Пусть $f_X = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$. Тогда выражение для первого дифференциала $df = f_x dx + f_y dy$ можно записать в виде

$$df = \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = f_X^T dX \ .$$

10.2.7. Векторно-матричные обозначения дифференциала второго порядка функции общего вида

По определению, $d^2 f = d\left(df\right) = d\left(f_X^T dX\right)$

$$= d\left(f_X^T\right) dX + f_X^T d\left(dX\right)$$

$$= d\begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d\left(f_x\right) & d\left(f_y\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2 x \\ d^2 y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2 x \\ d^2 y \end{pmatrix},$$

$$d^2 f = dX^T f_{XX^T} dX + f_X^T d^2 X \ .$$

10.2.8. *Векторно-матричные обозначения дифференциала второго порядка функции двух независимых переменных*

$$d^2 f = dX^T f_{XX^T} dX \ .$$

10.2.9. *Второй дифференциал функции трех переменных*

$$d^2 f = \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2 x \\ d^2 y \\ d^2 z \end{pmatrix},$$

для независимых переменных…

10.2.10. Третий дифференциал

$$d^3 f = f_{xxx} dx^3 + 3 f_{xxy} dx^2 dy + 3 f_{xyy} dx dy^2 + f_{yyy} dy^3 ,$$

10.2.11. Дифференциал n-го порядка

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y), \text{ где}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} dx^k \frac{\partial^{n-k}}{\partial y^{n-k}} dy^{n-k} .$$

10.3. Первый дифференциал сложной функции

10.3.1. Функция двух переменных

Пусть функции $x(t,s)$ и $y(t,s)$ дифференцируемы в точке $P_0(t_0, s_0)$, $x_0 = x(t,s)$, $y_0 = y(t,s)$, функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$, и $u(t,s) = f\left(x(t,s), y(t,s)\right)$. Тогда функция $u(t,s)$ дифференцируема в точке $P_0\left(t_0, s_0\right)$ и

$$du = \left(f_x x_t + f_y y_t\right)dt + \left(f_x x_s + f_y y_s\right)ds,$$

$$du = f_x(x_t dt + x_s ds) + f_y(y_t dt + y_s ds),$$

$$du = f_x dx + f_y dy,$$

$$u_t = f_x x_t + f_y y_t,\ u_s = f_x x_s + f_y y_s,$$

$$du = u_t dt + u_s ds.$$

10.3.2. *Векторно-матричные обозначения*

$$df = \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

$$df = \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ ds \end{pmatrix},$$

10.3.3. Функция двух переменных одной переменной

Пусть $u(t) = f\left(x(t), y(t)\right)$. Тогда

$$du = f_x dx + f_y dy, \qquad du = f_x(x_t dt) + f_y(y_t dt),$$

$$du = (f_x x_t + f_y y_t)dt, \; u_t = f_x x_t + f_y y_t, \; du = u_t dt.$$

10.4. Второй дифференциал сложной функции

10.4.1. Функция двух переменных в абстрактной форме

$$u = f(x, y), \quad d^2u = d(du),$$

$$d^2u = d(f_x dx + f_y dy),$$

$$d^2u = d(f_x)dx + f_x d^2x + d(f_y)dy + f_y d^2y,$$

$$d^2u = (f_{xx}dx + f_{xy}dy)dx + (f_{yx}dx + f_{yy}dy)dy$$

$$+ f_x d^2x + f_y d^2y,$$

$$d^2u = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$$

$$+ f_x d^2x + f_y d^2y\,,$$

$$d^2 f = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2x \\ d^2y \end{pmatrix},$$

10.5. Формула Тейлора первого порядка

10.5.1. Формула Тейлора–Пеано первого порядка

Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда в некоторой окрестности точки M_0

$$f(x_0+dx, y_0+dy) = f(x_0, y_0)$$
$$+df(x_0, y_0 \mid dx, dy) \ +R_2(x_0, y_0 \mid dx, dy),$$

причем верна формула Тейлора–Пеано,
$$R_2(x_0, y_0 \mid dx, dy) = o(\rho).$$

10.5.2. *Формула Тейлора–Лагранжа первого порядка*

Пусть функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в некоторой выпуклой окрестности $\Omega\left(M_0\right)$ точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$. Тогда в этой окрестности точки M_0 верна формула Тейлора–Лагранжа,
$$\forall M \in \Omega\left(M_0\right) \exists N\left(x_1, y_1\right):$$
$$R_2(x_0, y_0 \mid dx, dy) = \frac{1}{2!} d^2 f(x_1, y_1 \mid dx, dy),$$

причем $N\left(x_1, y_1\right)$ лежит на отрезке, соединяющем точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$ и $M\left(x, y\right)$.

10.6. Формула Тейлора второго порядка

10.6.1. Формула Тейлора-Пеано-2

Пусть функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$. Тогда в некоторой окрестности точки M_0

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) = f(x_0, y_0)$$
$$+df(x_0, y_0 \mid dx, dy) +$$
$$+\frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0 \mid dx, dy) + R_3(x_0, y_0 \mid dx, dy),$$

Пеано: $R_3(x_0, y_0 \mid dx, dy) = o(\rho^2)$.

10.6.2. Формула Тейлора-Лагранжа-2

Пусть функция $f(x,y)$ трижды дифференцируема в некоторой выпуклой окрестности $\Omega(M_0)$ точки $M_0(x_0,y_0)$. Тогда в этой окрестности точки M_0 верна формула Тейлора–Лагранжа, $\forall M \in \Omega(M_0) \exists N(x_1,y_1)$: $N(x_1,y_1) \in (M_0, M)$ (отрезку без концов) и

$$R_3(x_0,y_0 \,|\, dx,dy) = \frac{1}{3!} d^3 f(x_1,y_1 \,|\, dx,dy).$$

10.6.3. Матрица Гессе

$$d^2 f = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

$$d^2 f = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}, \ldots$$

10.6.4. *Пример*

$$f(x,y) = xy(3-x-y),$$

$$f_x = 3y - 2xy - y^2,$$

$$f_y = 3x - 2xy - x^2,$$

$$f_{xx} = -2y, \quad f_{xy} = 3 - 2x - 2y,$$

$$f_{yy} = -2x, \quad f_{yx} = 3 - 2y - 2x,$$

$$H = \begin{pmatrix} -2y & 3-2x-2y \\ 3-2x-2y & -2x \end{pmatrix},$$

$$H(1;1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

10.6.5. *Главные угловые миноры*

$$H=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix},$$

$$A_1=f_{xx},\ A_2=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix},\ A_3=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix},$$

$$H(1;1)=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ A_1=-2,\ A_2=3.$$

10.6.6. *Пример*

$$f(x,y,z)=xyz(4-x-y-z),$$

$$f_x=yz(4-x-y-z)-xyz,$$

$$f_y=xz(4-x-y-z)-xyz,$$

$$f_z=xy(4-x-y-z)-xyz,$$

$$f_{xx} = -2yz\,,\ \ f_{yy} = -2xz\,,\ \ f_{zz} = -2xy$$

$$f_{xy} = z(4 - x - y - z) - yz - xz\,,$$

$$f_{xz} = y(4 - x - y - z) - yz - xy\,,$$

$$f_{yz} = x(4 - x - y - z) - xy - xz\,,$$

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix},$$

$$H(1;1;1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = -2\,,\ A_2 = 3\,,\ A_3 = -4\,.$$

10.6.7. H-2013-01-04

10.7. Приближенные вычисления

Пример 1. $f(x,y)=xy(3-x-y)$,

$x_0=1,\ y_0=1,\ x=1{,}1,\ y=0{,}9$,

$df=(3y-2xy-y^2)dx+(3x-2xy-x^2)dy$,

$df(1;1)=(3-2-1)dx+(3-2-1)dy$,

$df(1;1)=0$,

$d^2f=(-2y)dx^2+2(3-2x-2y)dxdy+(-2x)dy^2$

$d^2f(1;1)=(-2)dx^2+2(-1)dxdy+(-2)dy^2$

$d^2f(1;1\,|\,0{,}1;-0;1)$

$=(-2)0{,}01+2(-1)(-0{,}01)+(-2)0{,}01$

$d^2f(1;1\,|\,0{,}1;-0;1)$

$=-0{,}02+0{,}02-0{,}02=-0{,}02$

$f(x,y)=xy(3-x-y)$

$f(1{,}1;0{,}9)=1{,}1\cdot 0{,}9\cdot(3-1{,}1-0{,}9)=0{,}99$

$f(1;1)=1$

$$f(1{,}1;0{,}9) \approx f(1;1) + df + \frac{1}{2}d^2 f$$

$$f(1{,}1;0{,}9) \approx 1 + 0 + \frac{1}{2}(-0{,}02)$$

10.7.1. M-2011-03-05, Лекция 6

Пример 2. $f(x, y) = x^y$,

$x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $x = 2{,}01$, $y = 3{,}02$,

$dx = 0{,}01$, $y = 0{,}02$,

$df = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$,

$df(2;3) = 3 \cdot 2^2 dx + 2^3 \ln 2 dy$,

$df(2;3 \,|\, 0{,}01;0{,}02) = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}01 + 2^3 \ln 2 \cdot 0{,}02$,

$= 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}01 + 2^3 \ln 2 \cdot 0{,}02$

$\approx 0{,}12 + 0{,}111 = 0{,}231$,

$$f(2,01;3,02) \approx f(2;3) + df \approx 8 + 0,231 = 8,231.$$

$$f(x, y) = 8,234782,$$

$$f(x_0, y_0) + df = 8,230904,$$

$$f(x_0, y_0) + df + \frac{1}{2} d^2 f = 8,234736.$$

10.8. Теорема Тейлора

10.8.1. Теорема Тейлора-Лагранжа

Большая теорема Тейлора–Лагранжа.

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в выпуклой окрестности $\Omega(M_0)$ точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$. Тогда

$\forall M \in \Omega(M_0) \exists N \in (M_0, M)$:

$f(M) = P_n(M, M_0) + R_{n+1}(M, M_0)$, где

$$P_n(M, M_0) = f(M_0) + df\Big|_{M_0}$$

$$+\frac{1}{2!}d^2 f\Big|_{M_0} + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f\Big|_{M_0},$$

$$R_{n+1}(M, M_0) = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f\Big|_{N},$$

Иначе, $f\left(x_1, \ldots, x_m\right) = f\left(x_1^0, \ldots, x_m^0\right) +$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[\left(x_1 - x_1^0\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \left(x_m - x_m^0\right)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k f\left(M_0\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[\left(x_1 - x_1^0\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \left(x_m - x_m^0\right)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^{n+1}$$

$$f\left(x_1 + \theta(x_1 - x_1^0), \ldots, x_m + \theta(x_m - x_m^0)\right),$$

где $0 < \vartheta < 1$.

Имеется в виду $N \in \left(M_0, M\right)$ (интервалу).

Замечание. Значение многочлена Тейлора и его производных порядка от 1 до n включительно в точке M_0 совпадают со значениями функции $f(M_0)$ и ее производных в точке M_0.

□ Докажем, что

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f\Bigg|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f\Bigg|_{N}.$$

Пусть $g(t) = f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$, $t\in[0;1]$,

$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^k g\Big|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}g\Big|_{t=\theta},$$

$$g(0) = f(x_0, y_0), \; g(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

$$dg = f_x(x_0, y_0)\, x_t + f_y(x_0, y_0)\, y_t$$

$$= f_x(M_0)\Delta x + f_y(M_0)\Delta y,$$

$$d^2 g = \left(dt \cdot \frac{d}{dt} \right)^2 g = \left(t \cdot \frac{d}{dt} \right)^2 g,$$

$$g(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$$

$$d^2 g\Big|_{t=0, dt=1} = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y)\Bigg|_{(x_0, y_0)},$$

$$d^2 g\Big|_{t=0, dt=1} = d^2 f\Big|_{(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)}, \ldots,$$

$$d^k g\Big|_{t=0, dt=1} = d^k f\Big|_{(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)},$$

$$d^{n+1} g\Big|_{t=\vartheta, dt=1} = d^{n+1} f\Big|_{(x_0 + \vartheta\Delta x, y_0 + \vartheta\Delta y, \Delta x, \Delta y)}. \blacksquare$$

10.8.2. *Теорема Тейлора-Пеано*

Теорема Тейлора – Пеано. Пусть функция $f(x_1,\dots,x_m)$ дифференцируема n раз в точке $M_0\left(x_1^0,\dots,x_m^0\right)$. Тогда функцию $f(x_1,\dots,x_m)$ в некоторой окрестности данной точки можно представить в виде

$$f(M)=P_n(M,M_0)+R_{n+1}(M,M_0),$$

где $P_n(M,M_0)=f(M_0)+df\big|_{M_0}+\dfrac{1}{2!}d^2f\Big|_{M_0}+$

$$\dots+\frac{1}{n!}d^nf\Big|_{M_0},\quad R_{n+1}(M,M_0)=o\left(\rho^n\right),$$

$$\rho=\sqrt{\left(x_1-x_1^{(0)}\right)^2+\ldots+\left(x_m-x_m^{(0)}\right)^2}.$$

Иными словами,

$$f(x_1,\dots,x_m)=f(x_1^0,\dots,x_m^0)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[\left(x_1-x_1^0\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\left(x_m-x_m^0\right)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k f\Bigg|_{M_0}$$

$+o\left(\rho^n\right)$. (Тейлора-Пеано-n)

Метод математической индукции.

При $n=1$ формула Тейлора-Пеано-n имеет вид

$$f(x_0+dx,y_0+dy)=f(x_0,y_0)$$

$$+f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy\ +o(\rho^2),$$

Так как эта формула совпадает с определением дифференцируемой функции, то она верна.

При $n=2$ формула Тейлора-Пеано имеет вид

$$f(x_0+dx,y_0+dy)=f(x_0,y_0)$$

$$+f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy$$

$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}dx^2 + 2 f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 \right) + o(\rho^2),$$

$$\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2}\ .$$

Предположим, что верна формула Тейлора-Пеано-(n-1).

□ Докажем, что $f(x, y) = f(x_0, y_0) +$

$$+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left\{ \left[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right]^k f \right\}\Bigg|_{M_0}$$

$$+o\left(\rho^n\right).$$

$$dx = \Delta x = x - x_0,\ dy = \Delta y = y - y_0,$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{q=0}^{k}C_k^q\left(dx\right)^q\left(dy\right)^{k-q}\frac{\partial^q}{\partial x^q}\frac{\partial^{k-q}}{\partial y^{k-q}}f\Big|_{M_0}$$

$$+o\left(\rho^n\right)$$

$$P=Q_0+\sum_{k=1}^{n}Q_k\,,\;Q_0=f\left(x_0,y_0\right),$$

$$Q_k=\frac{1}{k!}\sum_{q=0}^{k}C_k^q\left(dx\right)^q\left(dy\right)^{k-q}\frac{\partial^q}{\partial x^q}\frac{\partial^{k-q}}{\partial y^{k-q}}f\Big|_{M_0}\,,$$

0) $P\left(x_0,y_0\right)=f\left(x_0,y_0\right)$, прямая проверка,

1) $P_x\left(x_0,y_0\right)=f_x\left(x_0,y_0\right)$,

$P_y\left(x_0,y_0\right)=f_y\left(x_0,y_0\right)$,

k<) Докажем, что при $s<k$ верно равенство

$$\left(Q_k\right)_{x^j y^{s-j}}\Big|_{M_0}=0\,.$$

k=) Докажем, что при $s = k$ верно равенство

$$\left(Q_k\right)_{x^j y^{k-j}}\Big|_{M_0} = \left(f\left(x, y\right)\right)_{x^j y^{k-j}}\Big|_{M_0}.$$

k>) Докажем, что при $s > k$ верно равенство

$$\left(Q_k\right)_{x^j y^{s-j}}\Big|_{M_0} = 0.$$

Поэтому $\left(P\left(x, y\right)\right)_{x^j y^{k-j}}\Big|_{M_0} = \left(f\left(x, y\right)\right)_{x^j y^{k-j}}\Big|_{M_0}$

при всех $k \in \{0, ..., n\}$, $j \in \{0, ..., k\}$.

$$R(x, y) = f(x, y) - P(x, y),$$

$$R\left(M_0\right) = f\left(M_0\right) - P\left(M_0\right) = 0,$$

$$R_x\left(M_0\right) = f_x\left(M_0\right) - P_x\left(M_0\right) = 0,$$

$$R_y\left(M_0\right) = f_y\left(M_0\right) - P_y\left(M_0\right) = 0,$$

$$R_{x^j y^{k-j}}\Big|_{M_0} = \left(f - P\right)_{x^j y^{k-j}}\Big|_{M_0} = 0$$

при всех $k \in \{0, ..., n\}$, $j \in \{0, ..., k\}$.

$$R(x,y) = R(x_0,y_0) + R_x(x_0 + \vartheta dx, y_0 + \vartheta dy)dx$$

$$+ R_y(x_0 + \vartheta dx, y_0 + \vartheta dy)dy\,,$$

Но $\left(R_x\right)_{x^j y^{k-j}}\Big|_{M_0} = \left(f_x - P_x\right)_{x^j y^{k-j}}\Big|_{M_0} = 0\,,$

$$\left(R_y\right)_{x^j y^{k-j}}\Big|_{M_0} = \left(f_y - P_y\right)_{x^j y^{k-j}}\Big|_{M_0} = 0\,,$$

при всех $k \in \{0,...,n-1\}$, $j \in \{0,...,k\}$, поэтому

$$R_x(x_0 + \vartheta dx, y_0 + \vartheta dy) = o\left(\rho^{n-1}\right),$$

$$R_y(x_0 + \vartheta dx, y_0 + \vartheta dy) = o\left(\rho^{n-1}\right),$$

Но к тому же $|dx| \le \rho$, $|dy| \le \rho$,

$$R(x,y) = o\left(\rho^{n-1}\right)dx + o\left(\rho^{n-1}\right)dy = o\left(\rho^n\right) \quad \blacksquare$$

10.8.3. *Стандартные обозначения*

$$f(x+dx, y+dy) = f(x,y)$$

$$+ f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}dx^2 + 2 f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 \right) + o(\rho^2),$$

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz) = f(x_0, y_0, z_0)$$

$$+f_x(x_0, y_0, z_0)dx + f_y(x_0, y_0, z_0)dy$$

$$+f_z(x_0, y_0, z_0)dz$$

$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}dx^2 + f_{yy}dy^2 + f_{zz}dz^2 \right) + \frac{1}{2}\{2 f_{xy}dxdy$$

$$+2 f_{xz}dxdz \ +2 f_{yz}dydz\} + o(\rho^2),$$

$$f(x+dx, y+dy) = f(x,y) + \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} + o(\rho^2),$$