Локальный экстремум ФНП

1.1. Локальный экстремум

1.1.1. Понятие

Пусть функция $f(M)$ определена в окрестности точки M_0.

Определение 1а. Точка M_0 называется точкой локального минимума (локального максимума) функции $f(M)$, если

$\exists\Omega(M_0): \forall M \in \Omega(M_0): M \neq M_0$ верно $f(M) > f(M_0)$

или соответственно

$\exists\Omega(M_0): \forall M \in \Omega(M_0): M \neq M_0$ верно $f(M) < f(M_0)$.

Определение 1b. Точка M_0 не является точкой локального минимума (максимума) функции $f(M)$, если

$\forall\Omega(M_0)\ \exists M \in \Omega(M_0) : M \neq M_0$ и

$f(M) \leq f(M_0)$

или соответственно

$\forall\Omega(M_0)\ \exists M \in \Omega(M_0) : M \neq M_0$ и

$f(M) \geq f(M_0)$.

Определение 1c. Точка M_0 называется точкой нестрогого локального минимума функции $f(M)$, если

$\exists\Omega(M_0) : \forall M \in \Omega(M_0) : M \neq M_0$ и

$f(M) \geq f(M_0)$.

1.1.2. Теорема Ферма

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0.

Теорема Ферма (необходимые условия экстремума первого порядка дифференцируемой функции).

1) Пусть функция $f(x,y,z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и имеет в этой точке локальный экстремум (минимум или максимум, строгий или не строгий). Тогда $df(M_0)=0$, или, чтс,

$$\forall dx,dy,dz \quad \begin{pmatrix} f_x(M_0) & f_y(M_0) & f_z(M_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = 0,$$

или, чтс, $f_x(M_0)=0 \bigcap f_y(M_0)=0 \bigcap f_z(M_0)=0$.

2) Пусть функция $f(x,y,z)$ имеет частную производную f_x в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и имеет в этой точке локальный экстремум (минимум или максимум, строгий или не строгий). Тогда $f_x(M_0)=0$.

Аналогичные условия верны для всех остальных переменных.

3) Пусть функция $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет производную по направлению $\vec{l}$ и имеет в этой точке локальный экстремум (минимум или максимум, строгий или не строгий). Тогда $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)=0$.

Теорема Если найдется такое направление $\vec{l}$, что $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) \neq 0$, то $f(x,y,z)$ в $M_0(x_0,y_0,z_0)$ не имеет локального экстремума.

1.1.3. *Квадратичные формы*

Опр. Квадратичной формой называется функция

$$Q(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j .$$ Всегда $a_{ij}=a_{ji}$.

Векторно-матричная запись квадратичной формы размерности 3:

$$Q=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Опр. Квадратичная форма называется положительно определенной, если

$Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) > 0$ при всех значениях $x_1, \ldots, x_m$, кроме $x_1 = 0, \ldots, x_m = 0$.

Замечание. Любая квадратичная форма в точке $O(0, 0, \ldots, 0)$ равна нулю.

Опр. Квадратичная форма называется отрицательно определенной, если $Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) < 0$ при всех значениях $x_1, \ldots, x_m$, кроме $x_1 = 0, \ldots, x_m = 0$.

Если квадратичная форма является положительно определенной или отрицательно определенной, то она называется знакоопределенной.

Опр. Квадратичная форма называется знакопеременной, если

$\exists \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} : Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) < 0$,

$\exists \{y_1, y_2, \ldots, y_m\} : Q(y_1, y_2, \ldots, y_m) > 0$.

1.1.4. Критерий Сильвестра

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 +$$
$$\ldots + a_{1m}x_1x_m + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 +$$
$$\ldots + a_{2m}x_2x_m + \ldots + a_{mm}x_mx_m,$$

Матрица квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Угловыми минорами называются определители вида: $A_1, A_2, \ldots$.

Теорема (Критерий Сильвестра). 1) Для того чтобы квадратичная форма Q была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы $A_1 > 0, A_2 > 0, \ldots, A_n > 0$.

2) Для того чтобы квадратичная форма Q была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots$.

3) Для того чтобы квадратичная форма Q была знакопеременной, достаточно $A_2 < 0$.

Квадратичная форма называется *знакопеременной*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Например, $Q(x^1, x^2) = -(x^1)^2 + 2(x^2)^2$ — знакопеременная квадратичная форма, так как она имеет как положительные, так и отрицательные значения: $Q(1,0) = -1 < 0$, $Q(0,1) = 2 > 0$.

2. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы. Определители

$$\delta_1 = a_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad \delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются *угловыми минорами* $n \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$.

Теорема 4 (критерий Сильвестра). 1°. *Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны.*

2°. *Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров ее матрицы чередовались следующим образом:*

$$\delta_1 < 0, \quad \delta_2 > 0, \quad \delta_3 < 0, \quad \ldots$$

1.1.5. Достаточные условия

Теорема (достаточные условия локального экстремума второго порядка).

1) Пусть функция $f(x,y,z)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, верно равенство $df(M_0)=0$, и в этой точке выполнены условия положительной определенности квадратичной формы

$$d^2f=\begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

(условия Сильвестра), а именно,

$A_1>0$, $A_2>0$, $A_3>0$, где

$$A_1=f_{xx},\ A_2=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}.$$

Тогда $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет локальный минимум.

2) Если в этой точке выполнены условия отрицательной определенности квадратичной формы $d^2 f$, а именно,

$A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0$,

то $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет локальный минимум.

3) если $A_2 < 0$, в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ локального экстремума нет.

1.1.6. Необходимые условия второго порядка

Теорема (необходимые условия локального экстремума второго порядка).

Пусть функция $f(x,y,z)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и имеет в этой точке локальный минимум.

Тогда $df(M_0)=0$, и в этой точке квадратичная форма $d^2 f$ является или положительно определенной, или полуопределенной (неотрицательной), $A_1 \geq 0$, $A_2 \geq 0$.

1.1.7. Необходимые условия третьего порядка

Теорема (необходимые условия локального экстремума третьего порядка).

1) Пусть функция $f(x,y,z)$ трижды дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, в этой точ-

ке имеет локальный экстремум, $df(M_0)=0$, $d^2f(M_0)=0$. Тогда $d^3f(M_0)=0$.

2) Пусть функция $f(x,y,z)$ трижды дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $df(M_0)=0$, $d^2f(M_0)=0$, $d^3f(M_0)\neq 0$. Тогда $f(x,y,z)$ в этой точке не имеет локального экстремума.

1.1.8. *Сравнение с функциями одной переменной*

Определение. Точка x_0 называется точкой локального минимума (локального максимума) функции $f(x)$, если

$$\exists\Omega(x_0):\forall x\in\Omega(M_0):x\neq x_0\Rightarrow f(x)\geq f(x_0)$$

или соответственно

$$\exists\Omega(x_0):\forall x\in\Omega(x_0):x\neq x_0\Rightarrow f(x)\leq f(x_0).$$

Теорема Ферма

Ферма (необходимые условия экстремума первого порядка дифференцируемой функции)

1) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0)$ и имеет в этой точке локальный экстремум (минимум или максимум, строгий или не строгий). Тогда $df(x_0)=0$, или, что то же самое, $\forall dx \Rightarrow \ f'\left(x_0\right)dx=0$, или, что то же самое, $f'(x_0)=0$.

Достаточные условия

Теорема (достаточные условия локального экстремума второго порядка). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0)$, верно равенство $df(x_0)=0$, и в этой точке $f_{xx}>0$, то $f(x)$ в точке $M_0(x_0)$ имеет локальный минимум.

Если в этой точке $f_{xx} < 0$, то $f(x)$ в точке $M_0(x_0)$ имеет локальный минимум.

Необходимые условия второго порядка

Теорема (необходимые условия локального экстремума второго порядка). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0)$ и имеет в этой точке локальный минимум. Тогда $f'(x_0) = 0$, и $f''(x_0) \geq 0$. Нарушение любого из этих условий влечет отсутствие локального минимума. Аналогично для максимума.

Необходимые условия третьего порядка

Теорема (необходимые условия локального экстремума третьего порядка). 1) Пусть функция $f(x)$ трижды дифференцируема в точке $M_0(x_0)$, $f(x)$ в этой точке имеет локальный экстремум, и $df(M_0) = 0$, $d^2 f(M_0) = 0$. Тогда $d^3 f(M_0) = 0$.

2) Пусть функция $f(x, y, z)$ трижды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $df(M_0) = 0$, $d^2 f(M_0) = 0$, $d^3 f(M_0) \neq 0$. Тогда $f(x)$ в этой точке не имеет локального экстремума.