Лекция m3-06. Неявные функции.

9.1. Понятие

а) Одно уравнение с двумя переменными

а) $u(x, y) = 0$, например,

(а1) $x^2 + y^2 - 1 = 0$, окружность,

(а2) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, декартов лист,

(а3) $xy = 1$, гипепрбола,

Б) Одно уравнение с тремя переменными

б) $u(x, y, z) = 0$, например,

(б1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, сфера,

(б2) $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 - 8\sqrt{2}\,xyz = 0$, дирижабль,

С) Два уравнения с тремя переменными

$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 1, \end{cases}$ окружность в пространстве,

Два уравнения с четырьмя переменными

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2, \\ \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi, \end{cases}$$ преобразование координат.

Определение

Определение 1. Пусть функция $u(x, y)$ определена в области $D = \{x \in (a,b) \cap y \in (c,d)\}$ и $\forall x \in (a,b)$ уравнение $u(x, y) = 0$ имеет единственный корень $y \in (c,d)$. Тогда говорят, что уравнение $u(x, y) = 0$ определяет в области D неявную функцию $y = f(x)$, которая определена на $x \in (a,b)$.

Пример: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y \geq 0, \end{cases}$, полуокружность

$y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0;1]$.

Определение 2. Пусть D область на плоскости, функция $u(x,y,z)$ определена в области $G=\left\{(x,y)\in D \bigcap z\in(c,d)\right\}$ и $\forall(x,y)\in D$ уравнение $u(x,y,z)=0$ имеет единственный корень $z\in(c,d)$. Тогда говорят, что уравнение $u(x,y,z)=0$ определяет в области G неявную функцию $z=f(x,y)$, причем $(x,y)\in D$.

Пример: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z\geq 0, \end{cases}$, полусфера

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D=\left\{x^2+y^2\leq 1\right\}$.

9.2. Теорема о неявной функции

$F(x, y) = 0$

9.2.1. Теорема с док

Теорема 1. Пусть $F(x, y)$ определена в некоторой $\Omega_R\left(M_0\right)$, и

1) в точке $M_0(x_0, y_0)$ верно равенство $F\left(M_0\right) = 0$,

2) $F(x, y)$ непрерывна в $\Omega_R\left(M_0\right)$,

3) $F(x, y)$ дифференцируема в M_0, причем F_y существует в $\Omega_R\left(M_0\right)$ и непрерывна в точке M_0,

4) $F_y\left(M_0\right) \neq 0$.

Тогда в найдется окрестность точки x_0, в которой определена единственная функция

$y = f(x)$, для которой $F(x, f(x)) = 0$. Эта функция дифференцируема в точке M_0, причем

$$dy = -\frac{F_x(M_0)}{F_y(M_0)}dx, \text{ или } y_x = -\frac{F_x(M_0)}{F_y(M_0)}.$$

Заметим, что формулу для дифференциала можно записать в виде $F_x dx + F_y dy = 0$, или $dF = 0$.

□1. Докажем существование. Пусть $F_y(M_0) > 0$ и F_y непрерывна в точке M_0. Тогда

1) $\exists \Omega_0(M_0) = \{|x - x_0| < \delta_0 \cap |y - y_0| < \delta_0\}$, внутри которой $F_y(x, y) > 0$.

2) $F(x_0, y)\nearrow$ (как функция y) на множестве $y \in (y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0)$.

3а) Найдется $y_1 = y_0 - \delta_3$, $\delta_3 > 0$, $M_1(x_0, y_1)$:

$F(M_1) < 0$,

3б) Найдется $y_2 = y_0 + \delta_3$, $M_2(x_0, y_2)$:

$F(M_2) > 0$,

4а) Найдется

$\Omega_1(M_1) = \{|x - x_0| < \delta_1 \cap |y - y_1| < \delta_1\}$:

$F(M) < 0$ для всех $M \in \Omega_1(M_1)$,

4б) Найдется

$\Omega_2(M_2) = \{|x - x_0| < \delta_2 \cap |y - y_2| < \delta_2\}$:

$F(M) > 0$ для всех $M \in \Omega_2(M_2)$,

5) Найдется $\delta_4 > 0$: на множестве

$\mathrm{P}_0(M_0) = \{|x - x_0| \le \delta \cap |y - x_0| \le \delta_4\}$ имеем

$\forall M \in \mathrm{P}_0(M_0)$ верно $F_y(M) > 0$, для всех

$x_{*} \in \{|x_0 - x_{*}| \le \delta\}$ верно

$F(x_{*}, y)\nearrow$ на множестве $y \in (y_0 - \delta_4, y_0 + \delta_4)$,

$F(x_{*}, y_0 - \delta_4) < 0$, $F(x_{*}, y_0 + \delta_4) > 0$, поэтому

$\exists y_{*} \in (y_0 - \delta_4, y_0 + \delta_4) : F(x_{*}, y_{*}) = 0$.

□2. Докажем непрерывность.

□3. Докажем дифференцируемость.

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = F(x_0, y_0) \ + F_x \Delta x + F_y \Delta y$$

$$+\alpha(M)\Delta x + \beta(M)\Delta y,$$

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = 0,$$

$$F_x \Delta x + F_y \Delta y \ + \alpha(M)\Delta x + \beta(M)\Delta y = 0,$$

$$(F_x + \alpha)\Delta x + (F_y + \beta)\Delta y = 0,$$

$$\Omega_0(M_0) = \{|x - x_0| < \delta_0 \cap |y - x_0| < \delta_0\}:$$

$$F_y\left(M_0\right)+\beta\left(M\right)>0,$$

$$\Delta y=-\frac{F_x\left(M_0\right)+\alpha\left(M\right)}{F_y\left(M_0\right)+\beta\left(M\right)}\Delta x,$$

$$\Delta y=\left(-\frac{F_x\left(M_0\right)}{F_y\left(M_0\right)}+\tilde{\alpha}\left(M\right)\right)\Delta x.\ \blacksquare$$

9.2.2. *Вычисление дифференциала*

$u(x,y)=0$, $u_x dx+u_y dy=0$, $u_y dy=-u_x dx$,

поэтому $dy=-\dfrac{u_x}{u_y}dx$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{u_x}{u_y}$.

9.2.3. *Вычисление второго дифференциала*

$u_x dx+u_y dy=0$, $d\left(u_x dx+u_y dy\right)=0$,

$$d\left(u_x dx\right)+d\left(u_y dy\right)=0,$$

$$d\left(u_x\right)dx+u_x d\left(dx\right)+d\left(u_y\right)dy+u_y d\left(dy\right)=0,$$

$$d\left(u_x\right)dx+u_x d^2x+d\left(u_y\right)dy+u_y d^2y=0,$$

$$d\left(u_x\right)=u_{xx}dx+u_{xy}dy\,,\ d\left(u_y\right)=\ldots,$$

$$\left(u_{xx}dx+u_{xy}dy\right)dx+u_x d^2x+$$

$$+\left(u_{yx}dx+u_{yy}dy\right)dy+u_y d^2y=0,$$

Если x – независимая, то $d^2x=0$,

$$u_{xx}dx^2+2u_{xy}dxdy+u_{yy}dy^2+u_y d^2y=0,$$

$$d^2y=-\frac{u_{xx}dx^2+2u_{xy}dxdy+u_{yy}dy^2}{u_y},$$

причем $dy=-\dfrac{u_x}{u_y}dx$.

$$d^2y=-\frac{u_{xx}dx^2-2u_{xy}dx\cdot\dfrac{u_x}{u_y}dx+u_{yy}\left(-\dfrac{u_x}{u_y}dx\right)^2}{u_y},$$

$$d^2y = -\frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_x^2}{\left(u_y\right)^3}dx^2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_x^2}{\left(u_y\right)^3}.$$

9.2.4. *Случай точки возможного экстремума*

Пусть точка M_0 есть точка возможного экстремума дифференцируемой неявной функции, удовлетворяющей условиям теоремы 1, так что $dy = 0$, т.е. $-\frac{u_x}{u_y}dx = 0$, т.е. $u_x = 0$. Необходимое условие экстремума неявной функции имеет вид: $u_x = 0$.

Тогда $d\left(u_xdx + u_ydy\right) = 0$,

$$\left(u_{xx}dx+u_{xy}dy\right)dx+$$

$$+u_x d^2x+\left(u_{yx}dx+u_{yy}dy\right)dy+u_y d^2y=0,$$

$$d^2x=0,\ dy=0,$$

поэтому в точке возможного экстремума

$u_{xx}dx^2+u_y d^2y=0$, $d^2y=-\dfrac{u_{xx}}{u_y}dx^2$, поэтому

9.2.5. *Достаточное условие локального экстремума*

$dy=0$, $-\dfrac{u_{xx}}{u_y}dx^2>0$ (минимум),

$dy=0$, $-\dfrac{u_{xx}}{u_y}dx^2<0$ (максимум).

9.3. Примеры неявных функций

9.3.1. Примеры неявной функции $u(x,y)=0$.

Пример 1. $x^2+y^2=1,\quad y>0$, $2xdx+2ydy=0$,

$xdx+ydy=0$, $dy=-\dfrac{x}{y}dx$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$.

$d(xdx+ydy)=0$, $d(xdx)+d(ydy)=0$

$dxdx+xd^2x+dydy+yd^2y=0$,

$dx^2+dy^2+yd^2y=0$,

$$dx^2+\left(-\frac{x}{y}dx\right)^2+yd^2y=0,$$

$$d^2y=-\frac{1+\left(-\dfrac{x}{y}\right)^2}{y}dx^2,\quad d^2y=-\frac{y^2+x^2}{y^3}dx^2,$$

Точка возможного экстремума: $x=0$, $y=1$ (есть еще одна), $d^2y=-dx^2$, локальный максимум.

Пример 2. $xy=1$,

$$ydx+xdy=0,\ dy=-\frac{y}{x}dx,\ \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

$$d(ydx+xdy)=0,$$

$$dydx+yd^2x+dxdy+xd^2y=0,$$

$$2dxdy+xd^2y=0,\ 2dx\left(-\frac{y}{x}dx\right)+xd^2y=0,$$

$d^2y=2\dfrac{y}{x^2}dx^2$, локального экстремума нет.

Пример 3. $x^3+y^3-3xy=0$, $x>0\bigcap y>0$,

1) Первый дифференциал.

$$3x^2dx+3y^2dy-3ydx-3xdy=0,$$

$$x^2dx+y^2dy-ydx-xdy=0,$$

$$\left(x^2 - y\right)dx + \left(y^2 - x\right)dy = 0,$$

$$dy = -\frac{\left(x^2 - y\right)}{\left(y^2 - x\right)}dx, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\left(x^2 - y\right)}{\left(y^2 - x\right)},$$

2) Необходимое условие экстремума

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad x^2 - y = 0, \quad y = x^2$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy = 0, \\ \qquad y = x^2, \end{cases} \quad x^3 + x^6 - 3x^3 = 0,$$

$$x^3\left(x^3 - 2\right) = 0, \quad x = 2^{\frac{1}{3}}, \quad y = 2^{\frac{2}{3}}.$$

3) Достаточные условия экстремума,

$$\left(x^2 - y\right)dx + \left(y^2 - x\right)dy = 0,$$

$$d\left(\left(x^2 - y\right)dx + \left(y^2 - x\right)dy\right) = 0,$$

$$d\left(x^2 - y\right)dx + \left(x^2 - y\right)d^2x +$$

$$+d\left(y^2-x\right)dy+\left(y^2-x\right)d^2y=0,$$

Так как $x^2-y=0$ и $d^2x=0$, то

$$d\left(x^2-y\right)dx+\left(y^2-x\right)d^2y=0,$$

$$\left(2xdx-dy\right)dx+\left(y^2-x\right)d^2y=0,$$

$$\left(2xdx\right)dx+\left(y^2-x\right)d^2y=0,$$

$$2xdx^2+\left(y^2-x\right)d^2y=0,$$

$$d^2y=-\frac{2xdx^2}{\left(y^2-x\right)},\ d^2y=-\frac{2x}{y^2-x}dx^2,$$

$$d^2y=-\frac{2\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{4}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}dx^2 \ =-\frac{2}{2-1}dx^2 \ =-2dx^2<0,$$

это локальный максимум.

Пример 4. $\left(x^2+y^2\right)^2-4x^2y=0,$ (1a)

1) Первый дифференциал,

$$(x^2+y^2)^2-bx^2y=0, \qquad (1a)$$

$$u(x,y)=0,\ u_x dx+u_y dy=0, \qquad (2)$$

$$u_x=4x(x^2+y^2)-2bxy,$$

$$u_y=4y(x^2+y^2)-bx^2,$$

$$2(x^2+y^2)2xdx\ \ +2(x^2+y^2)2ydy$$

$$-2bxydx-bx^2dy=0,$$

$$dx\left(2(x^2+y^2)2x-2bxy\right)$$

$$+dy\left(2(x^2+y^2)2y-bx^2\right)=0,$$

$$dx\left(2x\left(2x^2+2y^2-by\right)\right)$$

$$+dy\left(4y(x^2+y^2)-bx^2\right)=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x\left(2x^2+2y^2-by\right)}{4y(x^2+y^2)-bx^2}.$$

2) Необходимое условие экстремума,

$$4x(x^2+y^2)-2bxy=0\,,$$

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2)-by=0, \\ (x^2+y^2)^2-bx^2y=0, \end{cases}, \quad \begin{cases} 2(x^2+y^2)-by=0, \\ \dfrac{b^2y^2}{4}-bx^2y=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2)-by=0, \\ by-4x^2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x^2+y^2)-by=0, \\ by-4x^2=0, \end{cases}$$

$$2(x^2+y^2)-4x^2=0, \quad 2x^2+2y^2-4x^2=0,$$

$$y^2-x^2=0\,, \quad y=x\,, \; 4x^2-bx^3=0\,,$$

$$4x^4-4x^3=0\,, \; 4x-4=0\,, \; y=x=1\,,$$

А теперь поясним технику проверки достаточных условий экстремума,

$$u_x dx+u_y dy=0\,, \; d\left(u_x dx+u_y dy\right)=0\,,$$

$$d(u_x)dx+d(u_y)dy+u_y d^2y=0\,,$$

Только в точке возможного экстремума

$$d(u_x)dx + u_y d^2 y = 0,$$

$$(u_{xx}dx + u_{xy}dy)dx + u_y d^2 y = 0,$$

$$u_{xx}dx^2 + u_y d^2 y = 0, \qquad d^2 y = -\frac{u_{xx}}{u_y}dx^2$$

$$u_x = 4x(x^2 + y^2) - 2bxy,$$

$$u_{xx} = 12x^2 + 4y^2 - 2by, \qquad u_{xx} = 8,$$

$$u_y = 4y(x^2 + y^2) - bx^2, \qquad u_y = 4,$$

$d^2 y = -2dx^2$, $\quad d^2 y < 0$, максимум

9.4. Неявные функции типа $F(x, y, z) = 0$.

9.4.1. Теорема о неявной функции

$$F(x, y, z) = 0$$

Теорема 2. Пусть $F(x, y, z)$ определена в некоторой $\Omega_R(M_0)$,

1) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ верно $F\left(M_0\right) = 0$,

2) $F(x, y, z)$ непрерывна в $\Omega_R\left(M_0\right)$,

3) $F(x, y, z)$ дифференцируема в M_0,

4) F_z существует в $\Omega_R\left(M_0\right)$ и непрерывна в точке M_0,

5) $F_z\left(M_0\right) \neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности точки $N_0\left(x_0, y_0\right)$ определена единственная функция $z = f\left(x, y\right)$, для которой $F\left(x, y, f\left(x, y\right)\right) = 0$.

Эта функция дифференцируема в M_0, причем

$$dz = -\frac{F_x}{F_z}dx - \frac{F_y}{F_z}dy\,,\ z_x = -\frac{F_x}{F_z},\ z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Заметим, что формулу для дифференциала можно записать в виде $F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$, или $dF = 0$.

□1. Докажем существование.

Пусть $F_z(M_0) > 0$ и непрерывна в точке M_0.

Тогда

1) $\exists \Omega_0(M_0) =$

$= \{|x - x_0| < \delta_0 \cap |y - y_0| < \delta_0 \cap |z - z_0| < \delta_0\}$,

внутри которой $F_z(x, y, z) > 0$.

2) $F_z(x_0, y_0, z) \nearrow$ как функция от z на множестве $z \in (z_0 - \delta_0, z_0 + \delta_0)$ при всех (x, y):

$|x - x_0| < \delta_0 \cap |y - y_0| < \delta_0$.

3а) Найдется $\delta_3 > 0$, $\delta_3 < \delta_0$ такое, что ,

$F(M_1) < 0$, где $M_1(x_0, y_0, z_1)$, $z_1 = z_0 - \delta_3$, 3б) Найдется $\delta_4 > 0$, $\delta_4 < \delta_0$, такое, что

$F\left(M_2\right) > 0$, где $M_2\left(x_0, y_0, z_2\right)$, $z_2 = z_0 + \delta_4$,

4а) Найдется $\delta_1 > 0$: $\Omega_1\left(M_1\right) =$

$= \left\{\left|x - x_0\right| < \delta_1 \cap \left|y - y_0\right| < \delta_1 \cap \left|z - z_1\right| < \delta_1\right\}$

такое, что $F\left(M\right) < 0$, $M \in \Omega_1\left(M_1\right)$,

4б) $F\left(M\right) > 0$, $M \in \Omega_2\left(M_2\right)$,

$\Omega_2\left(M_2\right) = \left\{\left|x - x_0\right| < \delta_2\right\} \cap$

$\cap \left\{\left|y - y_0\right| < \delta_2\right\} \cap \left\{\left|z - z_2\right| < \delta_2\right\}$.

5) На множестве

$\mathrm{P}_0\left(M_0\right) =$

$\left\{\left|x - x_0\right| \le \delta \cap \left|y - y_0\right| \le \delta \cap \left|z - z_0\right| \le \delta_4\right\}$ имеем

$\forall M \in \mathrm{P}_0\left(M_0\right) \Rightarrow F_z\left(M\right) > 0$,

$\left(x_{*}, y_{*}\right) \in\left\{\left|x-x_{*}\right| \leq \delta \cap\left|y-y_{*}\right| \leq \delta\right\}$ будет верно

$F_z\left(x_{*}, y_{*}, z\right) \nearrow$ на множестве

$z \in\left(z_0-\delta_4 ; z_0+\delta_4\right)$,

$F\left(x_{*}, y_{*}, z_0-\delta_4\right)<0$, $F\left(x_{*}, y_{*}, z_0+\delta_4\right)>0$,

$\exists z_{*} \in\left(z_0-\delta_4 ; z_0+\delta_4\right): F\left(x_{*}, y_{*}, z_{*}\right)=0$.

□2. Докажем непрерывность.

□3. Докажем дифференцируемость.

$$F\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z\right)=F\left(x_0, y_0, z_0\right)$$

$$+F_x \Delta x+F_y \Delta y+F_z \Delta z$$

$$+\alpha(M) \Delta x+\beta(M) \Delta y+\gamma(M) \Delta z,$$

$$F\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z\right)-F\left(x_0, y_0, z_0\right)=0,$$

$$F_x \Delta x+F_y \Delta y+F_z \Delta z$$

$$+\alpha(M) \Delta x+\beta(M) \Delta y+\gamma(M) \Delta z=0,$$

$$\left(F_x+\alpha\right)\Delta x+\left(F_y+\beta\right)\Delta y+\left(F_z+\gamma\right)\Delta z=0\,,$$

$$\Omega_0\left(M_0\right)=$$

$$=\left\{\left|x-x_0\right|<\delta_0\bigcap\left|y-x_0\right|<\delta_0\bigcap\left|z-z_0\right|<\delta_0\right\}:$$

$$F_z+\gamma\left(M\right)>0\,,$$

$$\Delta z=-\frac{F_x\left(M_0\right)+\alpha\left(M\right)}{F_z\left(M_0\right)+\gamma\left(M\right)}\Delta x$$

$$-\frac{F_y\left(M_0\right)+\beta\left(M\right)}{F_z\left(M_0\right)+\gamma\left(M\right)}\Delta y\,,$$

$$\Delta z=\left(-\frac{F_x\left(M_0\right)}{F_z\left(M_0\right)}+\tilde{\alpha}\left(M\right)\right)\Delta x$$

$$+\left(-\frac{F_y\left(M_0\right)}{F_z\left(M_0\right)}+\tilde{\beta}\left(M\right)\right)\Delta y\,.\ \blacksquare$$

9.4.2. Вычисление первого дифференциала

$F(x, y, z) = 0$, $u_x dx + u_y dy + u_z dz = 0$,

пусть $u_z \neq 0$,

$$dz = -\frac{u_x}{u_z}dx - \frac{u_y}{u_z}dy, \quad z_x = -\frac{u_x}{u_z}, \quad z_y = -\frac{u_y}{u_z}.$$

9.4.3. Вычисление второго дифференциала

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz = 0,$$

$$d\left(u_x dx + u_y dy + u_z dz\right) = 0,$$

$$\left(u_{xx}dx + u_{xy}dy + u_{xz}dz\right)dx +$$

$$+\left(u_{yx}dx + u_{yy}dy + u_{yz}dz\right)dy +$$

$$+\left(u_{zx}dx + u_{zy}dy + u_{zz}dz\right)dz +$$

$$+ u_x d^2x + u_y d^2y + u_z d^2z = 0 .$$

Так как

$z = f(x,y)$, то $d^2x = 0$, $d^2y = 0$, $d^2z \neq 0$,

$$\left(u_{xx}dx + u_{xy}dy + u_{xz}dz\right)dx$$
$$+\left(u_{yx}dx + u_{yy}dy + u_{yz}dz\right)dy$$
$$+\left(u_{zx}dx + u_{zy}dy + u_{zz}dz\right)dz \quad +u_z d^2z = 0,$$

причем $dz = -\dfrac{u_x}{u_z}dx - \dfrac{u_y}{u_z}dy$.

Отсюда получим после подстановки

$$d^2z = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

9.4.4. *Примеры* $F(x,y,z) = 0$.

Пример 1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z > 0$.

1) $2xdx + 2ydy + 2zdz = 0$, $xdx + ydy + zdz = 0$,

$$dz = -\frac{xdx + ydy}{z}, \; z_x = -\frac{x}{z}, \; z_y = -\frac{y}{z},$$

2) $d\left(xdx + ydy + zdz\right) = 0$,

$$dx^2 + xd^2x + dy^2 + yd^2y + dz^2 + zd^2z = 0,$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + zd^2z = 0,$$

$$d^2z = -\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z},$$

$$d^2z = -\frac{dx^2 + dy^2 + \left(-\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy\right)^2}{z},$$

$$d^2z = -\frac{(x^2 + z^2)dx^2 + (y^2 + z^2)dy^2 + 2xydxdy}{z^3}.$$

3) В точке возможного экстремума $dz = 0$,

$x = y = 0$, $z = \pm 1$, например, $z = 1$,

$dx^2 + dy^2 + zd^2z = 0$, $d^2z = -\dfrac{dx^2 + dy^2}{z}$,

$d^2z = -dx^2 - dy^2$ локальный максимум.

Пример 2. Докажите, что в некоторой окрестности точки $M_0=(1;1;1)$ существует единственная функция $z=f(x,y)$, определенная неявно уравнением

$x^5+y^5+z^5=3xyz$. ★

Найдите dz и d^2z.

□ 1) $u(x,y,z)=x^5+y^5+z^5-3xyz$,

1а) $u(x,y,z)$ непр. и дифф. в R^3.

1б) $u_z=5z^4-3xy$ непр. в R^3.

1в) Т.к. $u_z=5z^4-3xy$, то $u_z(M_0)=2>0$.

По теореме*, в нек. $\Omega(M_0)$ найдется единств. $z=f(x,y)$, опр. неявно уравнением (★). Эта функция непр. в $\Omega(M_0)$ и дифф. в M_0,

□ 2а) $dx\left(5x^4-3yz\right)+dy\left(5y^4-3xz\right)$

$+dz\left(5z^4-3xy\right)=0$,

$$dz=-\frac{5x^4-3yz}{5z^4-3xy}dx-\frac{5y^4-3xz}{5z^4-3xy}dy,$$

(★★)

$$z_x=-\frac{5x^4-3yz}{5z^4-3xy},\ z_y=-\frac{5y^4-3xz}{5z^4-3xy},$$

2б)

$dxd\left(5x^4-3yz\right)+d^2x\left(5x^4-3yz\right)$

$+dyd\left(5y^4-3xz\right)+d^2y\left(5y^4-3xz\right)$

$+dzd\left(5z^4-3xy\right)+d^2z\left(5z^4-3xy\right)=0$,

$dx\left(20x^3dx-3ydz-3zdy\right)$

$$+dy\left(20y^3dy-3xdz-3zdx\right)$$

$$+dz\left(20z^3dz-3xdy-3ydx\right)$$

$$+d^2z\left(5z^4-3xy\right)=0,$$

$$d^2z=\frac{-1}{5z^4-3xy}\{\ dx\left(20x^3dx-3ydz-3zdy\right)$$

$$+dy\left(20y^3dy-3xdz-3zdx\right)$$

$$+dz\left(20z^3dz-3xdy-3ydx\right)\},$$

Ответ: $d^2z=\dfrac{-1}{5z^4-3xy}\{$

$$dx^2\cdot 20x^3+dxdy\cdot\left(-3z\right)+dydz\left(-3y\right)$$

$$+dydx\cdot\left(-3z\right)+dy^2\cdot\left(20y^3\right)+dydz\left(-3x\right)$$

$$+dzdx\cdot\left(-3y\right)+dzdy\cdot\left(-3x\right)+dz^2\left(20z^3\right)\},$$

причем dz следует подставить из (★★). ■

Пример 3. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-8\sqrt{2}\cdot xyz=0$, (1)

$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-bxyz=0$, где $b=8\sqrt{2}$, и пусть $R^2=x^2+y^2+z^2$.

1) Вычислим первый дифференциал,

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(2xdx+2ydy+2zdz\right)-$$

$$-bxydz-bxzdy-byzdx=0,$$

$$\left(R^2\right)^2-b\cdot xyz=0,\ (2)$$

$$dx\left(4xR^2-byz\right)+dy\left(4yR^2-bxz\right)+$$

$$+dz\left(4zR^2-bxy\right)=0,$$

$$\left(x-x_0\right)\left(4x_0R^2-by_0z_0\right)+$$

$$\left(y-y_0\right)\left(4y_0R^2-bx_0z_0\right)+$$

$$+\left(z-z_0\right)\left(4z_0R^2-bx_0y_0\right)=0,$$

$$dz=-\frac{dx\left(4xR^2-byz\right)+dy\left(4yR^2-bxz\right)}{4zR^2-bxy},$$

$$z_x=-\frac{4xR^2-byz}{4zR^2-bxy},\ z_y=-\frac{4yR^2-bxz}{4zR^2-bxy}.$$

2) Ищем локальный экстремум только в области $x>0\bigcap y>0\bigcap z>0$. Положим $dz=0$,

$R^4=bxyz$,

$$\begin{cases} R^4-bxyz=0, \\ 4xR^2=byz, \\ 4yR^2=bxz, \end{cases},\ x=y>0,\ \begin{cases} R^4-bx^2z=0, \\ 4R^2=bz, \\ y=x, \end{cases}$$

$$\frac{b^2z^2}{16}-bx^2z=0,\ \frac{bz}{16}-x^2=0,\ \frac{8\sqrt{2}z}{16}-x^2=0,$$

$z=x^2\sqrt{2}$,

$$\left(x^2+x^2+2x^4\right)^2-8\sqrt{2}x^4\sqrt{2}=0,$$

$$4\left(x^2+x^4\right)^2-8\sqrt{2}x^4\sqrt{2}=0,$$

$$\left(1+x^2\right)^2-4=0,\ \left(1+x^2\right)=2,\ x^2=1$$

3) Решение: $x=y=1,\ z=\sqrt{2}$.

4) Второй дифференциал,

$$dx\left(4xR^2-byz\right)+dy\left(4yR^2-bxz\right)$$

$$+dz\left(4zR^2-bxy\right)=0,$$

$$\left(x-x_0\right)\left(4x_0R^2-by_0z_0\right)+$$

$$\left(y-y_0\right)\left(4y_0R^2-bx_0z_0\right)+$$

$$+\left(z-z_0\right)\left(4z_0R^2-bx_0y_0\right)=0,$$

$$d[dx\left(4xR^2-byz\right)+dy\left(4yR^2-bxz\right)$$

$$+dz\left(4zR^2-bxy\right)]=0,$$

$$dx\cdot d\left(4xR^2-byz\right)+dy\cdot d\left(4yR^2-bxz\right)$$

$$+dz\cdot d\left(4zR^2-bxy\right)\ +\left(4zR^2-bxy\right)d^2z=0,$$

Но в точке возможного экстремума $dz=0$, поэтому

$$dx\cdot d\left(4xR^2-byz\right)+dy\cdot d\left(4yR^2-bxz\right)$$

$$+\left(4zR^2-bxy\right)d^2z=0,$$

$$dx\left(4R^2dx+4x(2xdx+2ydy)-bzdy\right)$$

$$+dy\cdot\left(4R^2dy+4y(2xdx+2ydy)-bzdx\right)$$

$$+\left(4zR^2-bxy\right)d^2z=0,$$

$$d^2z=\ -\frac{(4R^2+8x^2)dx^2}{4zR^2-bxy}\ -\frac{(-2bz+16xy)dxdy}{4zR^2-bxy}$$

$$-\frac{(4R^2+8y^2)dy^2}{4zR^2-bxy}.$$

$$R^2=1+1+2=4,$$

$$4zR^2-bxy=4\sqrt{2}\cdot 4-8\sqrt{2}\cdot 1=8\sqrt{2},$$

$$H=\frac{-1}{8\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4R^2+8x^2 & -bz+8xy\\ -bz+8xy & 4R^2+8y^2\end{pmatrix},$$

$$H=\frac{-1}{8\sqrt{2}}\begin{pmatrix}24 & -8\\ -8 & 24\end{pmatrix},\ H=\frac{1}{8\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-24 & 8\\ 8 & -24\end{pmatrix},$$

Это максимум.

9.5. *Неявные функции вида* $F_{1,2}(x,y,z)=0$.

9.5.1. *Теорема о неявной функции* $F(x,y,z)=0$ *и* $G(x,y,z)=0$.

Теорема 3 (о неявной функции, определяемой системой $F(x,y,z)=0$, $G(x,y,z)=0$).

Рассмотрим систему $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$

Пусть $F(x,y,z)$ и $G(x,y,z)$ определены в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$,

(1) $F(M_0)=0$, $G(M_0)=0$,

(2) $F(x,y,z)$ и $G(x,y,z)$ непрерывны в окрестности M_0,

(3) $F(x,y,z)$ и $G(x,y,z)$ дифференцируемы в M_0,

(4) F_y, F_z, G_y, G_z существуют в $\Omega(M_0)$ и непрерывны в точке M_0,

(5) $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0$ в M_0. Тогда (а) в некоторой $\Omega(x_0)$ определены функции $y=f(x)$, $z=g(x)$, для которых одновременно

$F\left(x, f\left(x\right), g\left(x\right)\right) = 0$ и $G\left(x, f\left(x\right), g\left(x\right)\right) = 0$.

(б) Эти функции дифференцируемы в точке M_0, причем

$$\begin{cases} F_y dy + F_z dz = -F_x dx, \\ G_y dy + G_z dz = -G_x dx, \end{cases}$$

определитель этой системы отличен от нуля,

$$dy = \frac{\begin{vmatrix} -F_x dx & F_z \\ -G_x dx & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = -\frac{F_x G_z - F_z G_x}{F_y G_z - F_z G_y} dx,$$

$$dz = \frac{\begin{vmatrix} F_y & -F_x dx \\ G_y & -G_x dx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = -\frac{F_y G_x - F_x G_y}{F_y G_z - F_z G_y} dx.$$

Заметим, что формулу для dy, dz можно записать в виде $\begin{cases} F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0, \\ G_x dx + G_y dy + G_z dz = 0. \end{cases}$

□1. Докажем существование.

1) $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0$ в M_0, поэтому $F_y\left(M_0\right) \neq 0$ или $F_z\left(M_0\right) \neq 0$.

2) Пусть $F_y\left(M_0\right) \neq 0$. Тогда выполнены все условия теоремы 2, так что уравнение $F\left(x, y, z\right) = 0$ можно разрешить относительно y, и найти $y = h\left(x, z\right)$ такую, что $F\left(x, h\left(x, z\right), z\right) = 0$ в некоторой прямоугольной окрестности D точки $\left(x_0, z_0\right)$.

3) Наш план: решим уравнение $G\left(x, h(x, z), z\right) = 0$ и найдем $z = g(x)$. Тогда $y = h\left(x, g(x)\right) = f(x)$.

4) Условия 1–4 теоремы 1 для уравнения $G\left(x, h(x, z), z\right) = 0$ выполнены. Проверим, что $A = \dfrac{d}{dz} G\left(x, h(x, z), z\right) \neq 0$ в точке (x_0, z_0).

Найдем $A = \dfrac{d}{dz} G\left(x, h(x, z), z\right) = G_y h_z + G_z$.

Так как $F\left(x, h(x, z), z\right) = 0$, то

$$F_y h_z + F_z = 0,\; h_z = -\frac{F_z}{F_y}.$$

$$\frac{d}{dz}G\left(x,h\left(x,z\right),z\right)=-G_y\frac{F_z}{F_y}+G_z$$

$$=\frac{-G_yF_z+G_zF_y}{F_y}=\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}}{F_y}\neq 0$$. Таким образом, все условия теоремы 2 для уравнения $G\left(x,h\left(x,z\right),z\right)=0$ выполнены. Поэтому найдется окрестность точки x_0, в которой выполнено утверждение теоремы. ■

9.5.2. *Методика вычисления второго дифференциала*

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} F_y dy + F_z dz = -F_x dx, \\ G_y dy + G_z dz = -G_x dx, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_y d^2 y + F_z d^2 z + dy dF_y + dz dF_z = -dx dF_x, \\ G_y d^2 y + G_z d^2 z + dy dG_y + dz dG_z = -dx dG_x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_y d^2 y + F_z d^2 z = -dy dF_y - dz dF_z - dx dF_x, \\ G_y d^2 y + G_z d^2 z = -dy dG_y - dz dG_z - dx dG_x, \end{cases}$$

Далее найдем $dF_y = F_{yx} dx + F_{yy} dy + F_{yz} dz$, причем для dy и dz

9.5.3. *Примеры* $F(x,y,z)=0$ *и* $G(x,y,z)=0$.

Пример 1. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=6, \end{cases}$ причем $z = f_1(x)$, $y = f_2(x)$.

1) $\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ xdx + ydy + zdz = 0, \end{cases}$ $dy = -dx - dz$,

$xdx - y(dx + dz) + zdz = 0$,

$dz(z - y) = dx(y - x)$, $dz = \dfrac{y - x}{z - y} dx$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y - x}{z - y}$,

причем $z - y \neq 0$.

2) $\begin{cases} d^2x + d^2y + d^2z = 0, \\ xd^2x + yd^2y + zd^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} d^2y + d^2z = 0, \\ yd^2y + zd^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2y + d^2z = 0, \\ yd^2y + zd^2z = -dx^2 - dy^2 - dz^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} yd^2y + yd^2z = 0, \\ yd^2y + zd^2z = -dx^2 - dy^2 - dz^2, \end{cases}$$

$$(z-y)dz^2=-dx^2-dy^2-dz^2,$$

$$d^2z=\frac{-dx^2-dy^2-dz^2}{z-y},\quad dz=\frac{y-x}{z-y}dx,$$

$$dy=\frac{x-z}{z-y}dx,$$

$$d^2z=-\frac{1+\left(\frac{x-z}{z-y}\right)^2+\left(\frac{y-x}{z-y}\right)^2}{z-y}dx^2,$$

$$d^2z=-\frac{(z-y)^2+(x-z)^2+(y-x)^2}{(z-y)^3}dx^2,$$

$$dz=0,\ \frac{y-x}{z-y}=0,\ y=x,\quad \begin{cases}2x+z=4,\\ 2x^2+z^2=6,\end{cases}$$

a) $y=x=1,\ z=2,\ d^2z<0$, максимум

b) $y=x=\frac{5}{3},\ z=\frac{2}{3},\ d^2z>0$, минимум

9.6. Большая теорема о неявной функции.

Обозначим $X = (x_1, \ldots, x_m)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ $X_0\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right)$, $Y_0\left(y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)$, и рассмотрим систему $F_1(X, Y) = 0, \ldots, F_n(X, Y) = 0$, которую запишем в векторно-матричной форме, $F(X, Y) = 0$, где

$$F(X, Y) = \left(F_1(X, Y), \ldots, F_n(X, Y)\right)^T.$$

Теорема 4. Пусть

1) функция $F(X, Y)$ непрерывна в $\Omega(X_0, Y_0)$,

2) $F(X_0, Y_0) = 0$,

3) $F(X, Y)$ дифференцируема в M_0,

4) F_Y существует в $\Omega\left(X_0, Y_0\right)$ и непрерывна в $\left(X_0, Y_0\right)$,

5) $\left|F_Y\right| \neq 0$ в $\left(X_0, Y_0\right)$.

Тогда в некоторой $\Omega\left(X_0, Y_0\right)$ определена функция $Y = f\left(X\right)$, для которой $F\left(X, f\left(X\right)\right) = 0$. Эта функция дифференцируема в точке $\left(X_0, Y_0\right)$, причем $F_Y dY = -F_x dx$, определитель этой системы отличен от нуля. Формулу для дифференциала можно записать в виде $F_Y dY + F_x dx = 0$.

9.7. Неявные функции, определяемые системой $\begin{cases} f(x,y,u,v)=0, \\ g(x,y,u,v)=0. \end{cases}$

Пример 1. $\begin{cases} x = uv, \\ 2y = u^2 + v^2, \end{cases}$ причем нужно найти $u(x,y)$, $v(x,y)$.

А) $\begin{cases} dx = vdu + udv, \\ dy = udu + vdv, \end{cases}$ $\begin{cases} vdu + udv = dx, \\ udu + vdv = dy, \end{cases}$

$\begin{cases} uvdu + u^2dv = udx, \\ uvdu + v^2dv = vdy, \end{cases}$ $(u^2 - v^2)dv = udx - vdy,$

$$dv = \frac{u}{u^2 - v^2}dx + \frac{-v}{u^2 - v^2}dy,$$

b) $\begin{cases} v^2du + uvdv = vdx, \\ u^2du + uvdv = udy, \end{cases}$ $(u^2 - v^2)du = udy - vdx,$

$$du = \frac{-v}{u^2 - v^2}dx + \frac{u}{u^2 - v^2}dy,$$

$$u_x = \frac{-v}{u^2 - v^2},\ u_y = \frac{u}{u^2 - v^2},$$

$$v_x = \frac{u}{u^2 - v^2},\ v_y = \frac{-v}{u^2 - v^2},$$

$$\begin{cases} vd^2u + dudv + ud^2v + dudv = d^2x = 0, \\ ud^2u + du^2 + vd^2v + dv^2 = d^2y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} vd^2u + ud^2v = -2dudv, \\ ud^2u + vd^2v = -du^2 - dv^2, \end{cases}$$

$$(u^2 - v^2)d^2u = -udu^2 + 2vdudv - udv^2,$$

$$\begin{cases} d^2u = \dfrac{-udu^2 + 2vdudv - udv^2}{(u^2 - v^2)}, \\ du = \dfrac{-v}{u^2 - v^2}dx + \dfrac{u}{u^2 - v^2}dy, \\ dv = \dfrac{u}{u^2 - v^2}dx + \dfrac{-v}{u^2 - v^2}dy, \end{cases}$$

9.8. Задача о решении нелинейного уравнения с параметром

9.8.1. Лекция ТК-1

9.8.2. Примеры уравнения $u(p,y)=0$

Пример 1. $y^3-3y=0$,

$y(y^2-3)=0$, $y\in\{-\sqrt{3};0;\sqrt{3}\}$.

Пример 2. $y^3-3py=0$,

$y(y^2-3p)=0$,

$$\left[\begin{array}{ll} y\in\{-\sqrt{p},0,\sqrt{p}\}, & p>0, \\ y\in\{0\}, & p=0, \\ y\in\{-i\sqrt{-p},0,i\sqrt{-p}\}, & p<0. \end{array}\right.$$

9.8.3. Теорема об уравнении $u(p,y)=0$

Теорема. Пусть $M_0(p_0, y_0)$,

1) $u(M_0)=0$,

2) функция $u(p,y)$ непрерывна в $\Omega(M_0)$,

3) $u(x,y)$ дифференцируема в M_0, причем u_y существует в $\Omega(M_0)$ и непрерывна в M_0,

4) $u_y(M_0)\neq 0$.

Тогда (a) в некоторой $\Omega(M_0)$ определена единственная функция $y=f(p)$, для которой $u(p,f(p))=0$. Эта функция (b) непрерывна в некоторой $\Omega(M_0)$, (c) дифференцируема в M_0, $dy=-\dfrac{u_p(M_0)}{u_y(M_0)}dp$, или $y_p=-\dfrac{u_p(M_0)}{u_y(M_0)}$.

Заметим, что формулу для дифференциала можно записать в виде $u_p dp + u_y dy = 0$, или $dF = 0$.

9.8.4. *Применение теоремы* $u(p, y) = 0$

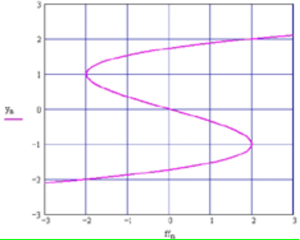
Пример 3. $p = y^3 - 3y$,

cata-Ch02-Sample01.mcd

$y^3 - 3y - p = 0$, $dy(3y^2 - 3) - dp = 0$,

$$\frac{dy}{dp} = \frac{1}{3y^2 - 3},\ y \neq \pm 1.$$

$$f(y) := y^3 - 3y$$



Пример 4, Гистерезис. $p = y^3 - 3y$,

$$\frac{dy}{dp}=\frac{1}{3y^2-3},\ p(t),\ y(t),\ \frac{dy}{dp}\frac{dt}{dt}=\frac{1}{3y^2-3},$$

$$\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dp}=\frac{1}{3y^2-3},\ \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dp}{dt}}=\frac{g(t)\cdot\frac{1}{3y^2-3}}{g(t)},$$

$$\begin{cases}\dfrac{dp}{dt}=g(t),\\ \dfrac{dy}{dt}=g(t)\cdot\dfrac{1}{3y^2-3},\end{cases},\quad \begin{cases}\dot{p}=g(p,t),\\ \dot{y}=\dfrac{g(p,t)}{3y^2-3},\end{cases}$$

Пример 5, для самостоятельной работы.

$$p=\pi y+2\sin\pi y,$$

cata-Ch02-Sample03.mcd

Пример 6, для самостоятельной работы.

$$p=3y^5-25y^3+60y,$$

cata-Ch02-Sample02.mcd

9.8.5. *Применение теоремы* $u_{1,2}\left(p,y,z\right)=0$

Пример 1. $\begin{cases} u\left(p,y,z\right)=0, \\ v\left(p,y,z\right)=0, \end{cases}$

9.8.6. *Применение теоремы* $u_{1,2}\left(p,q,y,z\right)=0$

Пример 1. $\begin{cases} u\left(p,q,y,z\right)=0, \\ v\left(p,q,y,z\right)=0, \end{cases}$

9.9. *Теорема о позиции локального экстремума с параметром.*

9.9.1. *Задача* $u\left(x,y,p\right)\to extr$.

Задача $u\left(x,y,p\right)\to extr$.

Необходимые условия локального экстремума

$$\begin{cases} u_x\left(x,y,p\right)=0, \\ u_y\left(x,y,p\right)=0. \end{cases}$$

9.9.2. *Теорема о неявной функции F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0.*

Теорема (о неявной функции, определяемой системой $F\left(x,y,z\right)=0$, $G\left(x,y,z\right)=0$).

Рассмотрим систему $\begin{cases} F\left(x,y,z\right)=0, \\ G\left(x,y,z\right)=0. \end{cases}$

Пусть $F\left(x,y,z\right)$ и $G\left(x,y,z\right)$ определены в окрестности точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, и

(1) $F\left(M_0\right)=0$, $G\left(M_0\right)=0$,

(2) $F\left(x,y,z\right)$ и $G\left(x,y,z\right)$ непрерывны в окрестности M_0,

(3) $F(x,y,z)$ и $G(x,y,z)$ дифференцируемы в M_0,

(4) F_y, F_z, G_y, G_z существуют в $\Omega(M_0)$ и непрерывны в M_0,

(5) $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0$ в M_0. Тогда (а) в некоторой $\Omega(x_0)$ определены функции $y = f(x)$, $z = g(x)$, для которых одновременно $F(x, f(x), g(x)) = 0$ и $G(x, f(x), g(x)) = 0$.

(б) Эти функции дифференцируемы в точке M_0, причем

$$\begin{cases} F_y dy + F_z dz = -F_x dx, \\ G_y dy + G_z dz = -G_x dx, \end{cases}$$

определитель этой системы отличен от нуля,

$$dy = \frac{\begin{vmatrix} -F_x dx & F_z \\ -G_x dx & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = -\frac{F_x G_z - F_z G_x}{F_y G_z - F_z G_y} dx,$$

$$dz = \frac{\begin{vmatrix} F_y & -F_x dx \\ G_y & -G_x dx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = -\frac{F_y G_x - F_x G_y}{F_y G_z - F_z G_y} dx.$$

Заметим, что формулу для dy, dz можно записать в виде $\begin{cases} F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0, \\ G_x dx + G_y dy + G_z dz = 0. \end{cases}$.

9.9.3. *Задача* $u(x, y, p) \to extr$.

Задача $u(x, y, p) \to extr$.

Необходимые условия локального экстремума

$$\begin{cases} u_x\left(x, y, p\right) = 0, \\ u_y\left(x, y, p\right) = 0. \end{cases}$$

Теорема (о зависимости положения точки локального экстремума дифференцируемой функции от параметра). Пусть $M_0(x_0, y_0, p_0)$,

1) $u_x\left(M_0\right) = 0$, $u_y\left(M_0\right) = 0$,

2) функции $u_x\left(x, y, p\right)$ и $u_y\left(x, y, p\right)$ непрерывны в $\Omega\left(M_0\right)$,

2) $u_x\left(x, y, p\right)$ и $u_y\left(x, y, p\right)$ дифференцируемы в M_0,

3) u_{xx}, u_{xy}, u_{yx}, u_{yy} существуют окрестности M_0 и непрерывны в M_0,

4) $\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix} \neq 0$ в M_0.

Тогда в некоторой окрестности p_0 определены функции $x = f(p)$, $y = g(p)$ для которых

$u_x\left(f(p), g(p), p\right) = 0$,

$u_y\left(f(p), g(p), p\right) = 0$.

Эти функции дифференцируемы в M_0, причем $\begin{cases} u_{xx}dx + u_{xy}dy = -u_{xp}dp, \\ u_{yx}dx + u_{yy}dy = -u_{yp}dp, \end{cases}$ определитель системы отличен от нуля, или, что то же самое,

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} -u_{xp} & u_{xx} \\ -u_{yp} & u_{yx} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix}} dp\,,\ dy = \frac{\begin{vmatrix} u_{xx} & -u_{xp} \\ u_{yx} & -u_{yp} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix}} dp\,.$$

Заметим, что формулу для дифференциала можно записать в виде

$$\begin{cases} u_{xx}dx + u_{xy}dy + u_{xp}dp = 0, \\ u_{yx}dx + u_{yy}dy + u_{yp}dp = 0, \end{cases}.$$

9.9.4. *Примеры регулярной зависимости от параметра*

Пример 1а.

$$u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy\,,\ \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases}$$

$$H = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix},$$

(а) $(x,y)=(1;1)$, $H=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$,

(б) $(x,y)=(0;0)$, $H=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$,

Пример 1б.

$$u(x,y,p)=x^3+y^3-3pxy\,,\quad \begin{cases} 3x^2-3py=0, \\ 3y^2-3px=0, \end{cases}$$

$$H=\begin{pmatrix} 6x & -3p \\ -3p & 6y \end{pmatrix},$$

(а) $(x,y)=(p;p)$, $H=\begin{pmatrix} 6p & -3p \\ -3p & 6p \end{pmatrix}$,

(б) $(x,y)=(0;0)$, $H=\begin{pmatrix} 0 & -3p \\ -3p & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} x^2 - py = 0, \\ y^2 - px = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2xdx - pdy - ydp = 0, \\ 2ydy - pdx - xdp = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xdx - pdy = ydp, \\ -pdx + 2ydy = xdp, \end{cases}$$

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} 2x & ydp \\ -p & xdp \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & -p \\ -p & 2y \end{vmatrix}}, \quad dx = \frac{\begin{vmatrix} 2x & y \\ -p & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & -p \\ -p & 2y \end{vmatrix}} dp,$$

$$dx = \frac{yp + 2x^2}{4xy - p^2} dp, \; dx\Big|_{p=1} = \frac{3}{3} dp = dp.$$

Пример 2б. $u(x, y, p) = xy(3p - x - y)$,

Пример 3б. $u(x, y, p) = x^2 y^3 (6p - 2x - 3y)$,

Пример 4б. $u(x, y, z, p) = xyz(4p - x - y - z)$,

9.9.5. *Примеры нерегулярной зависимости от параметра*

Пример 3а. $u(x, y, p) = x^4 + y^4 - 4px - 2q^2y^3$,

9.10. *Теорема о позиции локального экстремума с двумя параметрами.*

9.10.1. *Задача* $u(x, y, p, q) \to extr$.

Необходимые условия локального экстремума

$$\begin{cases} u_x(x, y, p, q) = 0, \\ u_y(x, y, p, q) = 0. \end{cases}$$

cata-extr2d-std-So1.mcd

9.10.2. *Машина К1.*

$$u(x, y, p, q) = k_1(x - p)^2 + k_2(y - q)^2$$

$$+k_3(l - l_0)^2,$$

$$l^2 = \left(d - a\cos x - b\cos y\right)^2 + \left(a\sin x - b\sin y\right)^2,$$