Лекция 9. Определенный интеграл.

9.1. Определенный интеграл

9.1.1. *Разбиение, выборка, интегральные суммы.*

Пусть на $[a,b]$ задана ограниченная функция $f(x)$.

Опр.1. Разбиение T отрезка $[a,b]$ – это набор сегментов $T_k = \left[x_{k-1}, x_k \right]$, $k = 1,...,n$, где $\{x_0, x_1,..., x_{n-1}, x_n\}$ –узлы разбиения, причем

$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$,

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$.

Опр.2. Диаметром разбиения T называется число

$$diam T = \max_k \left(x_k - x_{k-1} \right).$$

Замечание. $\forall T$ верно $diam T > 0$.

Опр.3. Выборка

$$\Xi(T) = \{\xi_x\}, \xi_x \in [x_{x-1}, x_k].$$

Вопрос: Возможно ли равенство $\xi_{k-1} = \xi_k$ при некотором k?

Опр 4. Интегральная сумма,
$$I(T,\Xi) = \sum_k \Delta x_k \cdot f(\xi_k).$$

9.1.2. *Верхние и нижние суммы.*

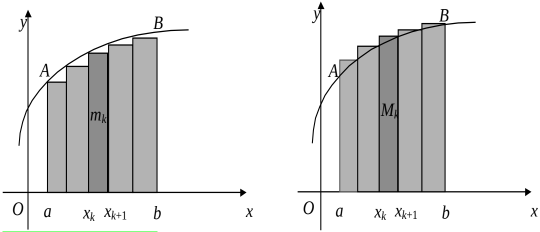
Пусть $m_k = \inf\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ и

$$M_k = \sup\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Опр.5. Нижняя сумма Дарбу равна

$s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$, верхняя сумма Дарбу

равна $S(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$.



Теорема 1. $\forall T$ верно $s(T) \le S(T)$.

□ $S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k \ge 0$. ■

Теорема 2. $\forall T, \forall \Xi(T)$ верно $s(T) \le I(T, \Xi) \le S(T)$.

□ Так как $m_k \le f(x) \le M_k$ на $[x_{k-1}, x_k]$, то

$$m_k \Delta x_k \le f(\xi_k)\Delta x_k \le M_k \Delta x_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k. \blacksquare$$

Теорема 3.

$$\forall T\, \forall \varepsilon > 0\ \exists \Xi'(T) : I(T, \Xi') - s(T) < \varepsilon,$$

$$\forall T\, \forall \varepsilon > 0\ \exists \Xi''(T) : S(T) - I(T, \Xi'') < \varepsilon.$$

$\square$ Пусть T и $\varepsilon > 0$ заданы. Тогда

$$I - s = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(f(\xi_k) - m_k \right) \Delta x_k,$$

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}\ \exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]:$$

$$0 \le f(\xi_k) - m_k \le \frac{1}{n}\frac{\varepsilon}{\Delta x_k}. \ \blacksquare$$

Вопрос: Приведите пример $f(x)$, T и $\Xi'(T)$ такие, что $I(T, \Xi') = s(T)$.

9.1.3. *Потомки и предки.*

Опр.6. Пусть имеются два набора точек,

$X' = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_n\}$, $x'_0 = a$, $x'_n = b$,

$X'' = \{x''_0, x''_1, \dots, x''_m\}$, $x''_0 = a$, $x''_m = b$,

Пусть $X = X' \bigcup X''$, т.е.

$X = \nearrow\{x'_0, x'_1, \dots, x'_n, x''_1, \dots, x''_{m-1}\}$ (объединение, переставленное в порядке возрастания элементов). Разбиение

$T = T' \bigcup T'' = T(X)$ называется объединением (потомком) разбиений $T'(X')$ и $T''(X'')$, которые для своего потомка являются предками.

Теорема 4. $\forall T', T''$ и $T = T' \bigcup T''$ верны неравенства

$s(T) \geq s(T')$, $s(T) \geq s(T'')$,

$S(T) \leq S(T')$, $S(T) \leq S(T'')$. □ Самостоятельно. ■

Теорема 5. $\forall T', T''$ верно $s(T') \leq S(T'')$.

□ Пусть $T = T' \bigcup T''$, тогда

$s(T') \leq s(T) \leq S(T) \leq S(T'')$. ■

Теорема 6. Для любой ограниченной на $[a,b]$ функции $f(x)$ существуют $\inf\limits_T S(T)$ и $\sup\limits_T s(T)$.

□ Пусть T_0 некоторое фиксированное разбиение. Тогда $\forall T$ верно $s(T) \le S(T_0)$, так что множество $\{s(T)\}$ ограничено сверху. Аналогично, множество $\{S(T)\}$ ограничено снизу. Далее самостоятельно. ■

Опр 7. Верхний интеграл: $\hat{I} = \inf\limits_T S(T)$,

Нижний интеграл: $\underset{\vee}{I} = \sup\limits_T s(T)$.

9.1.4. *Интегрируемые по Риману функции*

Опр.8а (Римана). Функцию $f(x)$, ограниченную на $[a,b]$, называют *интегрируемой* на $[a,b]$ по Риману, если

$$\exists \lim_{diamT\to 0} I(T,\Xi) = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_k \Delta x_k \cdot f(\xi_k).$$

Условие $\exists \lim_{diamT\to 0} I(T,\Xi) = I$ означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall T : diam\ T < \delta$ и $\forall \Xi(T)$ верно $\left| I(T,\Xi) - I \right| < \varepsilon$. Обозначение: $I = \lim_{diamT\to 0} I(T,\Xi) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Замечание. Раньше мы определили

1) Фигуру на плоскости как множество точек, расположенных внутри простой замкнутой кривой, т.е. замкнутой кривой без самопересечений и самоналожений, составленной из конечного числа гладких кривых без особых точек.

2) Вписанный в фигуру многоугольник, описанный многоугольник.

3) Внешнюю площадь фигуры D, $\widehat{S}\left(D\right)=\inf\limits_{\widehat{G}_m\left(D\right)} S\left(\widehat{G}_m\right)$, где $\widehat{G}_m$ есть описанный многоугольник, площадь которого мы уже умеем вычислять.

3) Внутреннюю площадь фигуры D, $\underset{\smile}{S}\left(D\right)=\inf\limits_{\underset{\smile}{G}_m\left(D\right)} S\left(\underset{\smile}{G}_m\right)$, где $\underset{\smile}{G}_m$ есть вписанный многоугольник.

4) Квадрируемые фигуры, для которых $\widehat{S}(D) = \underset{\smile}{S}(D)$.

Поэтому естественно рассматривать также площадь специальной фигуры, $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$. Это с одной стороны, сужение понятия площади фигуры на фигуры, три граничных линии которых отрезки, а с другой стороны, расширение понятия площади фигуры, так как требуется только ограниченность функции $f(x)$, но не ее гладкость. Естественно поэтому использовать также

Опр.8б (равносильное). Функцию $f(x)$, ограниченную на $[a,b]$, называют *интегрируемой* на $[a,b]$, если $\hat{I} = \check{I}$.

Обозначение: $I = \hat{I} = \check{I} = \int_a^b f(x)\,dx$.

9.1.5. *Необходимое и достаточное условие равенства верхнего и нижнего интегралов.*

Теорема 7. Для того, чтобы для ограниченной на отрезке функции $f(x)$ было выполнено условие $\hat{I} = \check{I}$ необходимо и достаточно, чтобы

$\forall \varepsilon > 0\ \exists T : S(T) - s(T) < \varepsilon$.

$\square$1. Пусть $\hat{I} = \underset{\vee}{I} = I$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$\exists T' : I - s(T') < \frac{\varepsilon}{2}$, $\exists T'' : S(T'') - I < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $T = T' \bigcup T''$. Тогда $s(T) \geq s(T')$,

$S(T) \leq S(T'')$. Поэтому $I - s(T) < \frac{\varepsilon}{2}$,

$S(T) - I < \frac{\varepsilon}{2}$, $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

□2. Пусть $\forall \varepsilon > 0\ \exists T : S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Так как $s(T) \le \underset{\vee}{I} \le \hat{I} \le S(T)$, то $\forall \varepsilon > 0$

верно $\hat{I} - \underset{\vee}{I} \le \varepsilon$, поэтому $\hat{I} - \underset{\vee}{I} = 0$. ■

9.1.6. *Лемма Дарбу (без доказательства).*

Теорема 8 (Дарбу).

$\underset{\wedge}{I} = \lim\limits_{diamT \to 0} s(T)$, $\hat{I} = \lim\limits_{diamT \to 0} S(T)$. Доказательство будет дано на консультации.

Теорема 9 (эквивалентность двух определений). Определения

$I = \lim\limits_{diamT \to 0} I(T, \Xi)$ и $I = \hat{I} = \underset{\vee}{I}$ равносильны.

□1. Пусть $\hat{I} = \check{I}$. Заметим, что $\forall T, \forall \Xi(T)$ верно $s(T) \le I(T, \Xi(T)) \le S(T)$. Устремим $diamT \to 0$ и используем лемму Дарбу, $s(T) \to \check{I}$, $S(T) \to \hat{I}$, поэтому $I(T, \Xi(T)) \to I$.

□2. Пусть $\exists \lim\limits_{diamT \to 0} I(T, \Xi) = I$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall T : diam\,T < \delta$ и $\forall \Xi(T)$ верно $\left| I(T, \Xi) - I \right| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Зафиксируем любое такое T. Тогда

$$\exists \Xi'(T): I(T,\Xi') - s(T) < \frac{\varepsilon}{4},$$

$\exists \Xi''(T): S(T) - I(T,\Xi'') < \frac{\varepsilon}{4}$. Поэтому

$$S(T) - s(T) < S(T) - I(T,\Xi'') +$$

$$+\left|I(T,\Xi'') - I(T,\Xi')\right| +$$

$$+I(T,\Xi') - s(T) < \varepsilon. \blacksquare$$

9.1.7. *Необходимое и достаточное условие интегрируемости*

Теорема 10. Для того, чтобы ограниченная на отрезке функция $f(x)$ была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists T : S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Опр.9. Колебанием ограниченной функции $f(x)$ на промежутке X называется число

$$\omega(f, X) = \sup_{x' \in X, x'' \in X} \left(f(x') - f(x'') \right).$$

Теорема 11.

$\omega(f, X) = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$. □ Доказать самостоятельно. ■

Теорема 12.

$S(T) - s(T) = \sum_k \omega\left(f, [x_{k-1}, x_k]\right) \Delta x_k$. □

Доказать самостоятельно. ■

Теорема 13. Для того, чтобы ограниченная на отрезке функция $f(x)$ была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists T : \sum_{k} \omega\left(f, \left[x_{k-1}, x_{k}\right]\right) \Delta x_{k} < \varepsilon .$$

□ Доказать самостоятельно. ■

9.2. Классы интегрируемых функций

9.2.1. Интегрируемость непрерывных функций

Теорема 1. Если $f(x) \nearrow$ на $[a,b]$, то $\omega\left(f,[a,b]\right) = f(b) - f(a)$. □ Доказать самостоятельно. ■

Теорема 2. $\forall T$ верно

$$S(T)-s(T)=\sum_k \omega\left(f,[x_{k-1},x_k]\right)\Delta x_k .$$

Теорема 3. Всякая непрерывная функция на $[a,b]$ интегрируема на $[a,b]$.

□ В соответствии с теоремой Кантора, $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \forall x', x'': |x'-x''|<\delta$ верно $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Пусть $\varepsilon>0$, $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{b-a}>0$ и $diam\, X<\delta$.

Тогда $\omega\left(f,[x_{k-1},x_k]\right)\le\varepsilon_1$,

$$S(T)-s(T)\le\sum_k \Delta x_k\varepsilon_1=(b-a)\varepsilon_1=\varepsilon . \blacksquare$$

9.2.2. *Интегрируемость монотонных функций*

Теорема 4. Всякая монотонная ограниченная на $[a,b]$ функция интегрируема на $[a,b]$.

□ Для возрастающей функции

$$\omega\left(f,[x_{k-1},x_k]\right)=f(x_k)-f(x_{k-1}),$$

$$S(T)-s(T)=\sum_k \Delta x_k\cdot\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)$$

$$\leq\left(\max_k \Delta x_k\right)\sum_k\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)$$

$=diamT\cdot\left(f(b)-f(a)\right)$. Далее самостоятельно. ■

9.2.3. *Пример неинтегрируемой функции.*

Функция Дирихле на отрезке $[0,1]$, принимающая значение 0 в рациональных точках и значение 1 в иррациональных точках данного отрезка, не интегрируема (по Риману) на $[0,1]$.

9.3. 10-5. *Основные свойства.*

Опр 1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Опр 2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Теорема 1. $\int_a^b C\,dx = C(b-a)$.

$$S(T)=\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \ =\sum_{k=1}^{n} C\Delta x_k \ =C\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k$$

$$=C(b-a),$$

$$s(T)=\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \ =\sum_{k=1}^{n} C\Delta x_k \ =C\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k$$

$$=C(b-a),\ \underset{\vee}{I}=\hat{I}=C(b-a).$$

Теорема 2. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то $f(x)\pm g(x)$ интегрируема на $[a,b]$, и $\int_a^b \left(f(x)\pm g(x)\right)dx$ $=\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

□ Так как $M_k\left[f+g\right]\le M_k\left[f\right]+M_k\left[g\right]$,

то $S\left(f+g,T\right)=\sum_{k=1}^{n}M_k\left[f+g\right]\Delta x_k$

$\le\sum_{k=0}^{n-1}M_k\left[f\right]\Delta x_k+\sum_{k=0}^{n-1}M_k\left[g\right]\Delta x_k$

$=S\left(f,T\right)+S\left(g,T\right)$.

Аналогично,

$s\left(f+g,T\right)\ge s\left(f,T\right)+s\left(g,T\right)$.

Так как $S\left(f+g,T\right)\le S\left(f,T\right)+S\left(g,T\right)$,

то $\inf\limits_{T}S\left(f+g,T\right)\le$

$\le\inf\limits_{T}S\left(f,T\right)+\inf\limits_{T}S\left(g,T\right)$,

$\hat{I}\left(f+g\right)\le\hat{I}\left(f\right)+\hat{I}\left(g\right)$, аналогично

$\underline{I}\left(f \right)+\underline{I}\left(g \right)\le \underline{I}\left(f+g \right)$. Поэтому

$\overline{I}\left(f+g \right)=\underline{I}\left(f+g \right)$. ■

Теорема 3. Если $f\left(x \right)$ интегрируема на $\left[a,b \right]$, то $\left| f\left(x \right) \right|$ интегрируема на $\left[a,b \right]$.

□ Колебание

$$\omega\left(\left| f \right|,X \right)=\sup_{x'\in X,x''\in X}\left(\left| f \right|\left(x' \right)-\left| f \right|\left(x'' \right) \right)$$

$$=\sup_{x'\in X,x''\in X}\left| \left| f \right|\left(x' \right)-\left| f \right|\left(x'' \right) \right|$$

$$\le \sup_{x'\in X,x''\in X}\left| f\left(x' \right)-f\left(x'' \right) \right| =\left(f,X \right),$$ далее

применим необходимое и достаточное условие интегрируемости. ■

Теорема 4. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то $f(x)\cdot g(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

$$\square\ \omega(fg,X)=\sup_{x'\in X,x''\in X}\left(fg(x')-fg(x'')\right)$$

$$=\sup_{x'\in X,x''\in X}\left|\begin{matrix}f(x')g(x')-f(x')g(x'')+\\+f(x')g(x'')-f(x'')g(x'')\end{matrix}\right|$$

$$=\sup_{x'\in X,x''\in X}\left|\begin{matrix}f(x')\left[g(x')-g(x'')\right]+\\+g(x'')\left[f(x')-f(x'')\right]\end{matrix}\right|$$

$$\le\sup_{x'\in X,x''\in X}\left|f(x')\left[g(x')-g(x'')\right]\right|$$

$$+\sup_{x'\in X,x''\in X}\left|g(x'')\left[f(x')-f(x'')\right]\right|$$

$$\le \sup_{x'\in X}\left|f\left(x'\right)\right|\cdot \sup_{x'\in X,x''\in X}\left|g\left(x'\right)-g\left(x''\right)\right|+\ldots$$

$\le M\left[\left|g\right|\right]\cdot\omega\left[f\right]+\ldots\le\varepsilon$, далее применим необходимое и достаточное условие интегрируемости. ■

Теорема 5. $\int_a^b kf\left(x\right)dx=k\int_a^b f\left(x\right)dx$.

Теорема 6. Если $\left[c,d\right]\subset\left[a,b\right]$ и $\exists\int_a^b f\left(x\right)dx$, то $\exists\int_c^d f\left(x\right)dx$. □ Возьмем специальное разбиение T, в число узлов которого входит c,d … ■

Теорема 7. $\forall a,b$, $\forall c\in\left(a,b\right)$ верно

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^c f\left(x\right)dx+\int_c^b f\left(x\right)dx.$$

9.4. Гл 10-6. Оценки.

9.4.1. Оценки типа неравенств.

T1. Если интегрируемая $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

□ $\forall T$ верно $s(T) = \sum_k m_k \Delta x_k \geq 0$, поэтому $I = \sup\limits_{T} \sum_k m_k \Delta x_k \geq 0$. ■

T2. Если интегрируемые $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$. Самостоятельно.

Т3. Если непрерывная $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$ и $\exists t \in (a,b): f(t) > 0$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Применим теорему об устойчивости знака непрерывной функции.

Т4а. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]$ верно $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

□ $s(T) = \sum_k m_k \Delta x_k \geq \sum_k m \Delta x_k$

$$= m(b-a),$$

$$\Rightarrow \underset{\vee}{I} = \sup_T \sum_k m_k \Delta x_k \geq m(b-a). \blacksquare$$

T4b. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $(b-a)\cdot\inf\limits_{[a;b]} f(x) \le \int_a^b f(x)\,dx$ $\le (b-a)\cdot\sup\limits_{[a;b]} f(x)$.

T4c. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $\inf\limits_{[a;b]} f(x) \le \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le \sup\limits_{[a;b]} f(x)$.

Замечание. $\langle f \rangle_{[a,b]} = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ называется средним значением интегрируемой функции $f(x)$ на $[a,b]$.

Т5а. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $|f(x)|$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

□1) Колебание функции $|f(x)|$ не больше, чем колебание функции $f(x)$.

□2) $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$,

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx. \blacksquare$$

Т5б. Если $f(x)$ и $g(x) \ge 0$ интегрируемы на $[a,b]$ и на отрезке $[a,b]$ выполняются неравенства $m \le f(x) \le M$, то

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

$\le M\int_a^b g(x)\,dx$. Самостоятельно.

9.4.2. Первая теорема о среднем.

Т6а. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$

и $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$

(например, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$),

то $\exists \mu \in [m,M]$: $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$.

□ $m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

$\le M\int_a^b g(x)\,dx$, $g(x)=1$,

$$m\int_a^b 1dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\int_a^b 1dx,$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a),$$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \le M, \quad m \le \mu \le M,$$

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}. \ \blacksquare$$

Т6б. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\exists c \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$.

□ Пусть $m=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$).

Тогда $m \leq \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leq M$ и

$\exists \mu \in [m,M]:\ \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx=\mu$.

Т.к. $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует такое $c\in[a,b]$, что

$\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx=\mu$ и $\mu=f(c)$, $c\in[a,b]$,

тогда $\int\limits_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$. ■

9.4.3. Обобщенная первая теорема о среднем.

Т7а. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$, и на $[a,b]$ $g(x) \geq 0$, то $\exists \mu \in [m, M]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

◘ 1) Пусть $\int_a^b g(x)dx = 0$ и

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\leq M\int_a^b g(x)dx, \text{ то } \int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Годится $\mu = 1$.

2) Пусть теперь $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Тогда

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

$$\le M\int_a^b g(x)\,dx,$$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M,$$

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx},\ m \le \mu \le M. \ \blacksquare$$

T7b. Если $f(x)$ непрерывна, $g(x)$ интегрируема на $[a,b]$, и $g(x) \ge 0$, то

$\exists c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

9.4.4. Вторая теорема о среднем

Т8. Если $f(x)$ интегрируема, $g(x)$ монотонна на $[a,b]$, то $\exists c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$= g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx.$$

9.5. Формула Ньютона Лейбница

9.5.1. Интеграл с переменным верхним пределом

Опр.1. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $x \in [a,b]$. Интегралом с переменным верхним пределом называется $\int_a^x f(t)\,dt$.

Теорема 1. 1) Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в любой внутренней точке отрезка $[a,b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$.

2) Интеграл $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для непрерывной функции $f(x)$.

☐ Пусть $x\in(a,b)$ и $x+\Delta x\in(a,b)$. Тогда $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}$, причем

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt$$

$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=f(c)\Delta x\text{, где}$$

$c\in(x,x+\Delta x)$. При $\Delta x\to 0$ имеем $f(c)\to f(x)$, поэтому $\Phi'(x)=f(x)$. ■

9.5.2. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 2 (формула Ньютона-Лейбница). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $F(x)$ –первообразная $f(x)$ на $[a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

□ $\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt$,

$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$. Поэтому

$\int_a^b f(t)dt$ =Φ(b)=Φ(b)–Φ(a). Если $F(x)$ –другая первообразная для функции $f(x)$, то $F(x)$=Φ(x)+C и

$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$. ■

9.6. Методы интегрирования.

9.6.1. Замена переменной.

Теорема 1 (замена переменной в определенном интеграле). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta]$ и $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi([\alpha,\beta])=[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

9.6.2. По частям.

Теорема 2 (определенное интегрирование по частям). Пусть $u(x)$, $v(x)$ –

две непрерывно дифференцируемые функции на $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du \, .$$

Пример 1. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{l} x=\sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array} \right\}$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt \quad = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 2а.

$$\int_0^5 x^3 (5-x)^8 \, dx = -\frac{1}{9}\int_0^5 x^3 d(5-x)^9$$

$$= -\frac{1}{9} x^3 (5-x)^9 \Big|_0^5 + \frac{3}{9}\int_0^5 x^2 (5-x)^9 dx$$

$$= \frac{-3}{9\cdot 10}\int_0^5 x^2 d(5-x)^{10}$$

$$= \frac{-3}{9\cdot 10} x^2 (5-x)^{10} \Big|_0^5 + \frac{3\cdot 2}{9\cdot 10}\int_0^5 x(5-x)^{10} \, dx$$

$$= \frac{-3\cdot 2}{9\cdot 10\cdot 11}\int_0^5 xd(5-x)^{11}$$

$$= \frac{-3\cdot 2}{9\cdot 10\cdot 11} x(5-x)^{11} \Big|_0^5$$

$$+\frac{3\cdot 2}{9\cdot 10\cdot 11}\int_0^5 (5-x)^{11}\,dx$$

$$=\frac{-3\cdot 2}{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}\int_0^5 d\,(5-x)^{12}$$

$$=\frac{-3\cdot 2}{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}(5-x)^{12}\Big|_0^5=\frac{3\cdot 2}{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}5^{12}.$$

Пример 2б. $\int_0^a x^m (a-x)^n\,dx$

$$=\frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 2}{(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m+1)}a^{n+m}$$

$$=\frac{m!n!}{(n+m+1)!}a^{n+m+1}.$$

Пример 3. Пусть $P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$.

и $m<n$. Тогда $\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]\frac{d^m}{dx^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\right]dx.$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]d\,\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left[\left(x^2-1\right)^m\right]$$

$$=\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left[\left(x^2-1\right)^m\right]\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$-\int\limits_{-1}^{1}d\,\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]\cdot\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left[\left(x^2-1\right)^m\right]$$

(продолжите самостоятельно по частям).

Пример 5. $\int_0^{\pi} \cos 3x\, e^{2x} dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 3x\, de^{2x}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x \Big|_o^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2x} d\cos 3x$$

$$= \frac{1}{2} e^{2\pi} \cos 3\pi - \frac{1}{2} e^{0} \cos 0$$

$$+ \frac{3}{2}\int_0^{\pi} e^{2x} \sin 3x dx$$

$$= -\frac{e^{2\pi}+1}{2} + \frac{3}{4}\int_0^{\pi} \sin 3x de^{2x}$$

$$=-\frac{e^{2\pi}+1}{2}+\frac{3}{4}\sin 3xe^{2x}\Big|_0^{\pi}-\frac{3}{4}\int_0^{\pi} e^{2x}d\sin 3x$$

$$=-\frac{e^{2\pi}+1}{2}-\frac{9}{4}\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3xdx,$$

$$\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3xdx$$

$$=-\frac{e^{2\pi}+1}{2}-\frac{9}{4}\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3xdx,$$

$$\left(1+\frac{9}{4}\right)\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3xdx=-\frac{e^{2\pi}+1}{2},$$

$$\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3xdx=-\frac{2}{13}\left(e^{2\pi}+1\right).$$

9.6.3. Нахождение площадей плоских фигур.

Криволинейной трапецией называют плоскую фигуру, ограниченную осью Ox, графиком функции $y = f\left(x\right)$ и двумя вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$. Площадь такой фигуры находят по формуле $S = \int_a^b f\left(x\right)dx$. Трапеция может также опираться на ось *Oy*, располагаться под осью *Ox* или слева от оси *Oy*. В этих случаях площадь находят соответственно по формуле:

$$S = \int_c^d xdy\,;\; S = -\int_a^b ydx\,;\; S = -\int_c^d xdy\,.$$

При нахождении площади криволинейной плоской фигуры, ограниченной несколькими кривыми, ее следует разбить на части, площадь каждой из которых можно найти по одной из приведенных формул.

9.7. Применение определенного интеграла.

9.7.1.Линейные моменты-1.

$$M_{[a,b]}\left[f(x),\rho(x)\right]=\int_a^b f(x)\rho(x)\,dx,$$

$$M_{[a,b]}\left[1,\rho(x)\right]=\int_a^b \rho(x)\,dx,$$

$$M_{[a,b]}[1]=\int_a^b \rho(x)\,dx,$$

$$M_{[a,b]}[x]=\int_a^b x\rho(x)\,dx,$$

$$M_{[a,b]}\left[x^2\right]=\int_a^b x^2\rho(x)\,dx,$$

$$\langle x\rangle_{[a,b]}=\frac{M_{[a,b]}[x]}{M_{[a,b]}[1]},$$

$$\left\langle x^2\right\rangle_{[a,b]}=\frac{M_{[a,b]}[x^2]}{M_{[a,b]}[1]},$$

9.7.2. *Линейные моменты-2.*

$$\rho(x)=x^n,\ [a,b],$$

$$M_{[a,b]}[1]=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1},$$

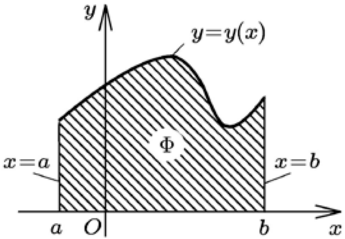
$$M_{[a,b]}[x] = \frac{b^{n+2} - a^{n+2}}{n+2},$$

$$M_{[a,b]}\left[x^2\right] = \frac{b^{n+3} - a^{n+3}}{n+3},$$

$$\langle x \rangle_{[a,b]} = \frac{\dfrac{b^{n+2} - a^{n+2}}{n+2}}{\dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}\frac{b^{n+2} - a^{n+2}}{b^{n+1} - a^{n+1}},$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle_{[a,b]} = \frac{n+1}{n+3}\frac{b^{n+3} - a^{n+3}}{b^{n+1} - a^{n+1}},$$

9.7.3. *Площадь плоской фигуры.*

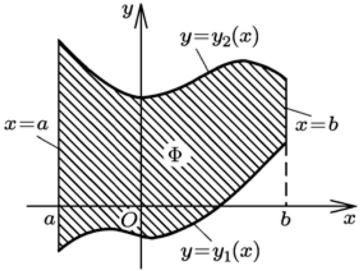


Если $a \le x \le b$, $0 \le y \le y(x)$, то

$$M_D[1] = \iint_D 1dxdy = \int_a^b dx \int_0^{y(x)} dy$$

$$= \int_a^b y(x)\,dx,$$

$M_D[1] = \int_a^b y(x)\,dx$ – площадь.



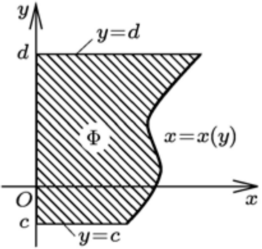
Если $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, то

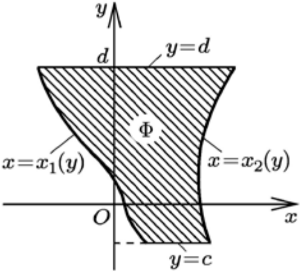
$$M_D[1] = \iint_D 1dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} 1dy$$

$$= \int_a^b \left(y_2(x) - y_1(x) \right) dx,$$

$M_D[1] = \int_a^b \left(y_2(x) - y_1(x) \right) dx$ – площадь.

9.7.4. Площадь фигуры $x = f(y)$.





9.7.5. Моменты: x.

$$M_D[x] = \iint\limits_D x\,dx\,dy = \int_a^b x\,dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\,,$$

$$M_D[x] = \int_a^b x\left(y_2(x) - y_1(x)\right)dx\,.$$

$$\langle x\rangle_D = \frac{M_D[x]}{M_D[1]}.$$

9.7.6. Моменты: x^2.

$$M_D\left[x^2\right] = \iint\limits_D x^2\,dx\,dy = \int_a^b x^2\,dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\,,$$

$$M_D\left[x^2\right] = \int_a^b x^2\left(y_2(x) - y_1(x)\right)dx\,.$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{M_D[x^2]}{M_D[1]},\ D = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2.$$

9.7.7. Моменты: y.

$$M_D[y]=\iint\limits_D y\,dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} y(x)\,dy,$$

$$M_D[y]=\int_a^b dx\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y_1}^{y_2}=\int_a^b \frac{y_2^2(x)-y_1^2(x)}{2}dx.$$

$$M_D[y]=$$

$$=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))\frac{y_2(x)+y_1(x)}{2}dx.$$

$$\langle y\rangle_D=\frac{M_D[y]}{M_D[1]}.$$

9.7.8. Моменты: y^2.

$$M_D\left[y^2\right]=\iint\limits_D y^2dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} y^2dy,$$

$$M\left[y\right]=\int_a^b dx\,\frac{y^3}{3}\bigg|_{y_1}^{y_2}=\int_a^b \frac{y_2^3(x)-y_1^3(x)}{3}\,dx.$$

$$M_D\left[y\right]=\int_a^b\left(y_2(x)-y_1(x)\right)$$

$$\frac{y_2^2(x)+y_1y_2+y_1^2(x)}{2}\,dx.$$

$$\left\langle y^2\right\rangle_D=\frac{M_D[y^2]}{M_D[1]},\ Dy=\left\langle y^2\right\rangle-\left\langle y\right\rangle^2.$$