

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

Физический факультет

Кафедра математики

А.А.Быков

Задачи практикума по компьютерной математике

Москва

2009

1 Численное решение линейной краевой задачи на собственные значения

Рассмотрим задачу вычисления всех (или некоторых) значений параметра λ , при которых

$$\text{краевая задача } (*) \quad \begin{cases} \vec{Y}' = A(t, \lambda) \vec{Y}, & t_1 < t < t_2, \\ B \vec{Y}(t_1) = 0, \\ D \vec{Y}(t_2) = 0, \end{cases} \quad \text{имеет нетривиальное решение.}$$

Размерности матриц $A_{[n][n]}$, $B_{[n-r][n]}$, $D_{[r][n]}$; ранг матрицы B равен $n - r$; ранг матрицы D равен r . Пусть $\mathcal{Y}_0$ есть фундаментальная система решений системы $B\mathcal{Y} = 0$. Это матрица размера

$$(\mathcal{Y}_0)_{[n][r]}. \text{ Решим семейство задач Копи } \begin{cases} Y_{(k)}' = A(t, \lambda) Y_{(k)}, & t_1 < t < t_2, \\ Y_k(t_1) = (\mathcal{Y}_0)_{*k}, \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r, \text{ где } * \text{ вместо}$$

первого индекса означает, что первый индекс принимает все возможные для данной матрицы значения. Образует матричную функцию $\mathcal{Y}(t) = (Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(r)})$. Заметим, что $\mathcal{Y}(t_1) = \mathcal{Y}_0$.

$$\text{Общее решение задачи } \begin{cases} \vec{Y}' = A(t, \lambda) \vec{Y}, & t_1 < t < t_2, \\ B \vec{Y}(t_1) = 0 \end{cases} \quad \text{имеет вид } \vec{Y}(t) = \mathcal{Y}(t) \vec{C}, \text{ где } \vec{C} -$$

вектор-столбец размера $[r]$. Для того чтобы найти нетривиальное решение задачи $(*)$, необходимо и достаточно найти нетривиальное решение линейной однородной системы

$$D \vec{Y}(t_2) = 0, \text{ равносильной } D \mathcal{Y}(t_2) \vec{C} = 0, \text{ это решение существует тогда и только тогда, когда } |D \mathcal{Y}(t_2)| = 0. \text{ Чтобы найти некоторые из значений } \lambda, \text{ следует построить график функции } f(\lambda) = |D \mathcal{Y}(t_2)| \text{ и найти ее корни. Более подробно см.}$$

[Бахвалов Н.С. Численные методы (любое издание)],

легко находится в inet в pdf-формате.

В размещенном на сайте коде для построения графика функции $f(\lambda) = |D \mathcal{Y}(t_2)|$ размерность матрицы и соответственно размерность системы увеличена на 1. Последний элемент вектора $\vec{Y}$ равен λ и задается в виде начального значения.

1.1 Список заданий практикума

1. (Демонстрационная задача).

$$\text{Найдите значение параметра } \omega, \text{ при котором краевая задача } \begin{pmatrix} Y_1' \\ Y_2' \\ Y_3' \\ Y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 \beta_2 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & 0 & -\omega^2 \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix},$$

$$Y_1(t_1) = 0, Y_1(t_2) = 0, Y_3(t_1) = 0, Y_3(t_2) = 0, t_1 = 0, t_2 = 5, \beta_1 = 0,4, \beta_2 = 0,06, \alpha_1 = 0,2, \alpha_2 = -0,07, t_1 = 0, t_1 = 5, \text{ имеет нетривиальное решение.}$$

Заметим, что эта задача равносильна

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u + \beta_2 \frac{du}{dt} + \beta_1 v = 0, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + \omega^2 v + \alpha_2 \frac{dv}{dt} + \alpha_2 u = 0, \\ u(t_1) = u(t_2) = 0, v(t_1) = v(t_2) = 0. \end{cases}$$

2. Найдите по крайней мере одно значение параметра ω , при котором краевая задача

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u + \beta_2 \frac{du}{dt} + \beta_1 v = 0, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 4\omega^2 v + \alpha_2 \frac{dv}{dt} + \alpha_2 u = 0, \\ u(t_1) = u(t_2) = 0, v(t_1) = v(t_2) = 0, \end{cases}$$

$t_1 = 0, t_2 = 5, \beta_1 = 0,4, \beta_2 = 0,06, \alpha_1 = 0,2, \alpha_2 = -0,07$, имеет нетривиальное решение. Найдите это решение.

3. Найдите по крайней мере одно значение параметра ω , при котором краевая задача

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u + \beta_2 \frac{du}{dt} + \beta_1 v = 0, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 4\omega^2 v + \alpha_2 \frac{dv}{dt} + \alpha_1 u = 0, \\ \frac{du}{dt}(t_1) = 0, u(t_2) = 0, \frac{dv}{dt}(t_1) = 0, v(t_2) = 0, \end{cases}$$

$t_1 = 0, t_2 = 5, \beta_1 = 0,4, \beta_2 = 0,06, \alpha_1 = 0,2, \alpha_2 = -0,07$, имеет нетривиальное решение. Найдите это решение.

4. Найдите по крайней мере одно значение параметра ω , при котором краевая задача

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u + \beta_2 \frac{du}{dt} + \beta_1 v = 0, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 4\omega^2 v + \alpha_2 \frac{dv}{dt} + \alpha_1 u = 0, \\ \frac{du}{dt}(t_1) = 0, \frac{du}{dt}(t_2) = 0, \frac{dv}{dt}(t_1) = 0, \frac{dv}{dt}(t_2) = 0, \end{cases}$$

$t_1 = 0, t_2 = 5, \beta_1 = 0,4, \beta_2 = 0,06, \alpha_1 = 0,2, \alpha_2 = -0,07$, имеет нетривиальное решение. Найдите это решение.

5. Найдите по крайней мере одно значение параметра ω , при котором краевая задача

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u + 2 \frac{du}{dt} - v - \frac{dv}{dt} = 0, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 4\omega^2 v + \frac{dv}{dt} - 0,2u + \frac{du}{dt} = 0, \\ \frac{du}{dt}(t_1) = 0, \frac{dv}{dt}(t_1) = 0, u(t_2) = 0, v(t_2) = 0, \end{cases}$$

$t_1 = 0, t_2 = 5$, имеет нетривиальное решение. Найдите это решение.

6. Найдите по крайней мере одно значение параметра ω , при котором краевая задача

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u + 2 \frac{du}{dt} - v - \frac{dv}{dt} = 0, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 4\omega^2 v + \frac{dv}{dt} - 0,2u + \frac{du}{dt} = 0, \\ \frac{du}{dt}(t_1) = 0, \frac{dv}{dt}(t_1) = 0, \frac{du}{dt}(t_2) = 0, \frac{dv}{dt}(t_2) = 0, \end{cases}$$

$t_1 = 0, t_2 = 5$, имеет нетривиальное решение. Найдите это решение.

7. Найдите по крайней мере одно значение параметра ω , при котором краевая задача

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + 9\omega^2 u + \frac{du}{dt} - 2v - \frac{dv}{dt} = 0, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 4\omega^2 v + \frac{dv}{dt} - 0,2u + \frac{du}{dt} = 0, \\ u(t_1) = 0, \frac{dv}{dt}(t_1) = 0, u(t_2) = 0, \frac{dv}{dt}(t_2) = 0, \end{cases}$$

$t_1 = 0, t_2 = 5$, имеет нетривиальное решение. Найдите это решение.

8. Найдите по крайней мере одно значение параметра ω , при котором краевая задача

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + 9\omega^2 u + 2 \frac{du}{dt} - v - \frac{dv}{dt} = 0, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 4\omega^2 v + \frac{dv}{dt} - 0,2u + \frac{du}{dt} = 0, \\ \frac{du}{dt}(t_1) = 0, \frac{dv}{dt}(t_1) = 0, \frac{du}{dt}(t_2) = 0, v(t_2) = 0, \end{cases}$$

$t_1 = 0, t_2 = 5$, имеет нетривиальное решение. Найдите это решение.

9. Найдите по крайней мере одно значение параметра ω , при котором краевая задача

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + 9\omega^2 u + 2 \frac{du}{dt} - 3v - \frac{dv}{dt} = 0, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 4\omega^2 v + \frac{dv}{dt} - 0,7u + \frac{du}{dt} = 0, \\ u(t_1) = 0, \frac{dv}{dt}(t_1) = 0, u(t_2) = 0, \frac{dv}{dt}(t_2) = 0, \end{cases}$$

$t_1 = 0, t_2 = 5$, имеет нетривиальное решение. Найдите это решение.

10. Найдите по крайней мере одно значение параметра ω , при котором краевая задача

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + 9\omega^2 u + 3 \frac{du}{dt} - 2v - \frac{dv}{dt} = 0, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 4\omega^2 v + \frac{dv}{dt} - 0,7u + \frac{du}{dt} = 0, \\ \frac{du}{dt}(t_1) = 0, v(t_1) = 0, \frac{du}{dt}(t_2) = 0, v(t_2) = 0, \end{cases}$$

$t_1 = 0, t_2 = 5$, имеет нетривиальное решение. Найдите это решение.

11. Найдите по крайней мере одно значение параметра q , при котором краевая задача

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + 300u + 2 \frac{du}{dt} + qv - \frac{dv}{dt} = 0, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 100v + \frac{dv}{dt} - 0,2u + \frac{du}{dt} = 0, \\ u(t_1) = 0, v(t_1) = 0, \frac{du}{dt}(t_2) = 0, \frac{dv}{dt}(t_2) = 0, \end{cases}$$

$t_1 = 0, t_2 = 5$, имеет нетривиальное решение. Найдите это решение.

12. Найдите по крайней мере одно значение параметра q , при котором краевая задача

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + 16u + 3\frac{du}{dt} + qv - \frac{dv}{dt} = 0, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 25v + -2\frac{dv}{dt} - u + \frac{du}{dt} = 0, \\ \frac{du}{dt}(t_1) = 0, \frac{dv}{dt}(t_1) = 0, u(t_2) = 0, v(t_2) = 0, \end{cases}$$

$t_1 = 0, t_2 = 5$, имеет нетривиальное решение. Найдите это решение.

2 Внутренний переходный слой в однородной среде

2.1 Введение

Контрастные структуры (далее сокращенно КС) – это своеобразные конфигурации, которые могут образовываться в процессе эволюции физических полей различной природы в нелинейном режиме. В КС обширные области медленного изменения поля (мы их для краткости называем пятнами) разделяются малыми по объему областями быстрого изменения поля. Большой интерес с теоретической и практической точки зрения представляют КС, образующиеся в результате ограничения поля определенным уровнем насыщения. В типичной ситуации положительное или отрицательное поле возрастает по модулю до величины уровня насыщения, а на границе положительного и отрицательного полей образуется тонкий *внутренний переходный слой* (далее сокращенно ВПС), внутри которого поле меняет знак. Переходный слой медленно перемещается в результате совместного действия диффузии, переноса, генерации и насыщения.

В настоящее время детально изучены стационарные КС и разработаны методы анализа их устойчивости. Законы эволюции неустойчивых контрастных структур практически не изучены. Имеется несколько факторов, которые определяют эволюцию КС – конфигурация пятен различной полярности, неоднородность уровня насыщения, кривизна ВПС и т.д. Мы вычислим приближенно скорость дрейфа ВПС и время жизни КС с заданной начальной конфигурацией. Эти параметры КС можно вычислить, оставаясь в рамках простейшей одномерной модели.

2.2 Одномерная модель

Рассмотрим одномерную по пространству задачу Коши для уравнения диффузии с переносом и размножением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\gamma(u), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (1)$$

$\gamma(u) = \gamma_0 (1 - u^2/U^2)$, с начальными условиями $u(x, 0) = u_0(x)$ и граничными условиями при $|x| \rightarrow \infty$, обеспечивающими ограниченность решения на всей прямой. Пусть в начальный момент времени в среде имеется хаотическое мелкомасштабное магнитное поле, напряженность которого много меньше уровня насыщения, $|u_0| \ll U$. За счет диффузионного члена мелкомасштабные неоднородности $u_0(x)$ будут быстро сглажены и функция $u(x, t)$ примет вид набора хаотически расположенных пятен положительной и отрицательной полярности. Затем за счет процесса генерации величина u внутри пятен с достаточно большим начальным диаметром вырастет до величины, несколько меньшей уровня насыщения U , на границе пятен положительной и отрицательной полярности образуется ВПС, после чего конфигурация решения в целом может быть описана как КС. В дальнейшем каждый ВПС перемещаются, причем направление движения вообще говоря таково, что более узкие пятна уменьшаются, а более широкие пятна увеличиваются.

Проведя линейную замену переменных x , t и функции u , приведем уравнение (1) к безразмерному виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u^2), \quad (2)$$

где $\delta = \sqrt{\mu/\gamma_0}$ – толщина ВПС. Ограничимся исследованием квазистационарных КС, в которых напряженность поля в любой момент времени близка к решению стационарной задачи, параметры которой медленно меняются со временем. Поэтому сначала рассмотрим стационарные решения типа КС.

2.3 Стационарные контрастные структуры

Напряженность поля в стационарной одномерной КС можно найти из уравнения

$\delta^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + u(1 - u^2) = 0$. Точное решение выражается через неполный эллиптический интеграл первого рода,

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi,$$

$$\frac{x - x_0}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{a} F(\phi, k), \quad \phi = \arcsin\left(\frac{u}{b}\right), \quad k = \frac{b}{a}, \quad (3)$$

x_0 – координата центра ВПС,

$a = \sqrt{1 + \sqrt{1 - C}}$, $1 \leq a < 2$, $b = \sqrt{1 - \sqrt{1 - C}}$, $0 \leq b < 1$, константа C определяет наклон

кривой $u(x)$ в центральной точке, $\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{C}{2}}$.

Если $0 < C < 1$, то $u(x)$ – периодическая функция, период T равен

$$T = \delta \frac{4\sqrt{2}}{a} K\left(\frac{b}{a}\right), \quad (4)$$

где $K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Величина T лежит в пределах $2\pi\delta < T < \infty$, причем $T \rightarrow +\infty$ при $C \rightarrow 1$, $C < 1$ и $T \rightarrow 2\pi\delta$ при $C \rightarrow 0$, $C > 0$. Максимальное значение $u_{\max} = b$ достигается при $x - x_0 = T/4$, минимальное значение $u_{\min} = -b$ при $x - x_0 = 3T/4$.

Пусть ширина положительного пятна $W = T/2$ много больше δ – толщины ВПС: $W \gg \delta$, и соответственно $1 - C \ll 1$, так что параметр k в (3) порядка единицы: $k \simeq 1$. Используем асимптотическое разложение эллиптического интеграла для случая $k < 1$, $k \rightarrow 1$:

$K(k) = \ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}}$ [8]. Подставляя это выражение в (4), получим приближенное выражение для W :

$$W = \frac{T}{2} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} \ln \frac{64}{1 - C}, \quad (5)$$

Полезно определить диапазон изменения параметров в (5), в пределах которого можно использовать эти соотношения, не нарушая условий существования периодического решения.

Величина C не может быть больше 1, а минимально допустимое значение C можно вычислить из соотношения для минимально возможного периода $T_{\min} = 2\pi\delta$. Соответствующее значение C равно $C_{\min} = 1 - 64e^{-\sqrt{2}\pi} \approx 0.246$. Мы используем (5) в случае $C > C_{\min}$.

В критическом случае $C = 1$, $u(x)$ – монотонная функция, обращающаяся в нуль одной точке $x = x_0$:

$$u = \tanh\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x - x_0}{\delta}\right). \quad (6)$$

В соответствии с общепринятой классификацией, это решение представляет контрастную структуру типа "ступенька". Если $C > 1$, то решение неограничено на конечном интервале и не представляет интереса.

2.4 Квазистационарные контрастные структуры

Квазистационарная одномерная КС состоит из чередующейся последовательности пятен положительной и отрицательной полярности, разделенных ВПС, причем начальная ширина каждого пятна много больше толщины ВПС. Чтобы оценить время жизни нестационарной КС, рассмотрим эволюцию периодической системы положительных и отрицательных пятен, $u(x + T, t) = u(x, t)$, причем начальная ширина положительного пятна несколько больше начальной ширины отрицательного пятна. В пределах одного периода $u(x, t)$ образуются два ВПС, каждый из которых будет *медленно* дрейфовать в сторону более узкого пятна, в результате чего ширина положительного пятна будет увеличиваться, а изначально меньшая ширина отрицательного пятна будет уменьшаться. Когда ширина более узкого пятна становится сравнимой с толщиной ВПС, происходит лавинообразное разрушение более узкого пятна, на этапе разрушения КС уже не является квазистационарной.

Возможны разные режимы эволюции КС с широкими ($W > \pi\delta$) пятнами обоих знаков. Если ширина положительного пятна точно равна ширине отрицательного пятна, то КС устойчива и скорость дрейфа ВПС будет равна нулю. Для исключения еще одного малого параметра, характеризующего степень асимметрии КС, наряду с малым параметром, равным отношению толщины ВПС к ширине пятна, рассмотрим только сильно асимметричные КС, для которых ширина каждого положительного пятна много больше ширины соседних с ним отрицательных пятен. Предположим, что *внутри ВПС*, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, в каждый фиксированный момент времени функцию $u(x, t)$ можно приближенно описать выражением (6), причем координата центральной точки будет медленно перемещаться с некоторой скоростью $v(t)$, которая зависит от ширины каждого из пятен:

$$u(x, t) = f(x - vt), \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta. \quad (7)$$

Функция $f(x)$ претерпевает медленное изменение, связанное с изменением ширины пятен положительной и отрицательной полярности. Предположим, что выражение (3), определяющее стационарное периодическое решение, можно использовать и для непериодического нестационарного решения *вне ВПС*, т.е. для положительного и отрицательного пятна *по отдельности*, для которых будем использовать разные значения C , которая теперь будет функцией t (каждое из этих значений мало отличается от критического значения $C = 1$). Соответствующие значения параметров a, b также будут отличаться. Ширину положительного и отрицательного пятен обозначим $W^{(+)}(t)$ и $W^{(-)}(t)$, причем $W^{(+)}(t) + W^{(-)}(t) = T$. Таким образом, внутри одного периода КС выделены три области, в которых решение представляется разными формулами.

Вычислим скорость дрейфа ВПС. Проинтегрируем (2) по интервалу $x_0 - W^{(-)}/2 < x < x_0 + W^{(+)}/2$, длина которого равна половине периода решения и который включает в точности один ВПС. Из (7) следует, что результат интегрирования левой части (2) равен $-v(u_{\max} - u_{\min}) \approx -2v$. Преобразовывая результат интегрирования правой части, используем выражения (3), (5) и стандартную процедуру сшивания аналитических выражений для решения в области ВПС и в области положительного и отрицательного пятен. Используя предположение о том, что ширина положительного пятна много больше ширины

отрицательного пятна, $\pi\delta \ll W^{(-)} \ll W^{(+)}$, получим

$$v \simeq -\delta \times 8\sqrt{2} \exp\left(-\sqrt{2}\frac{W^{(-)}}{\delta}\right). \quad (8)$$

Так как уменьшение ширины отрицательного пятна обусловлено одновременным дрейфом двух ВПС навстречу друг другу с равными скоростями, определяемыми соотношением (8), ширину отрицательного пятна можно найти из дифференциального уравнения $\frac{dW^{(-)}}{dt} = -2v$. Подставим сюда выражение для v из (8), после чего нетрудно получить *точное* решение этого уравнения: $W^{(-)}(t) = \delta \times 2^{-1/2} \ln[-32(t - t_0)]$, t_0 – постоянная интегрирования. Выберем t_0 так, чтобы в этот момент времени ширина отрицательного пятна была равна половине критического значения периода $W^{(-)}(t_0) = \pi\delta : t_0 = \frac{e^{\sqrt{2}\pi}}{32} \approx 2.657$. Учитывая, что в используемом приближении ширина каждого из пятен не может быть меньше $\pi\delta$, момент времени t_0 можно интерпретировать как момент перехода от медленной стадии эволюции КС к быстрой стадии, когда более узкое пятно исчезает. Теперь выражение для зависимости ширины пятна от времени приобретает вид, пригодный для сравнения с компьютерным экспериментом:

$$W(t) = \delta \times 2^{-1/2} \ln\left(-32t + e^{\sqrt{2}\pi}\right). \quad (9)$$

Здесь $t \leq 0$, и момент времени $t = 0$ соответствует полному разрушению КС. Соотношение (9) можно использовать и для вычисления времени жизни КС с заданной начальной шириной пятна отрицательной полярности W :

$$t = \frac{1}{32} \left[\exp\left(\sqrt{2}\pi\right) - \exp\left(\sqrt{2}\frac{W}{\delta}\right) \right]. \quad (10)$$

Предполагается, что в начальный момент времени ширина пятна положительной полярности много больше W . То же самое выражение можно, очевидно, использовать и для времени жизни уединенного пятна с начальной шириной W , так как в этот случай можно получить предельным переходом $W = \text{const}$, $T \rightarrow \infty$.

Поскольку напряженность магнитного поля удовлетворяет уравнению весьма общего вида (2), полученные оценки для скорости дрейфа и времени жизни применимы к широкому классу задач, в которых некоторое физическое поле $u(x, t)$ участвует в процессах переноса, диффузии и размножения с малой толщиной переходного слоя по сравнению с размерами области.

2.5 Результаты компьютерного моделирования

Для определения пределов применимости формул (10) и (9) мы использовали метод компьютерного моделирования. Уравнение (2) решалось с помощью неявной нелинейной разностной схемы, для решения системы нелинейных уравнений на каждом шаге по времени применялся итерационный метод Ньютона. На рисунке рис. 1 показана эволюция несимметричной нестационарной КС, для которой в начальный момент времени $W^{(-)} = 2.5\pi\delta$ и $W^{(+)} = 3.5\pi\delta$. Для простоты мы выбрали параметры $\mu = 1$, $\gamma_0 = 1$. Представлена серия моментальных фотографий графика $u(x, t)$ в пределах одного периода. Интервал времени между двумя последовательными снимками $\Delta t = 50$. Координата x отложена по горизонтальной оси в единицах δ . Горизонтальные линии $u = 1$ и $u = -1$ соответствуют уровню насыщения. На начальной стадии КС квазистационарна, ВПС медленно перемещается, ширина отрицательного пятна убывает и ширина положительного пятна возрастает. В тот момент,

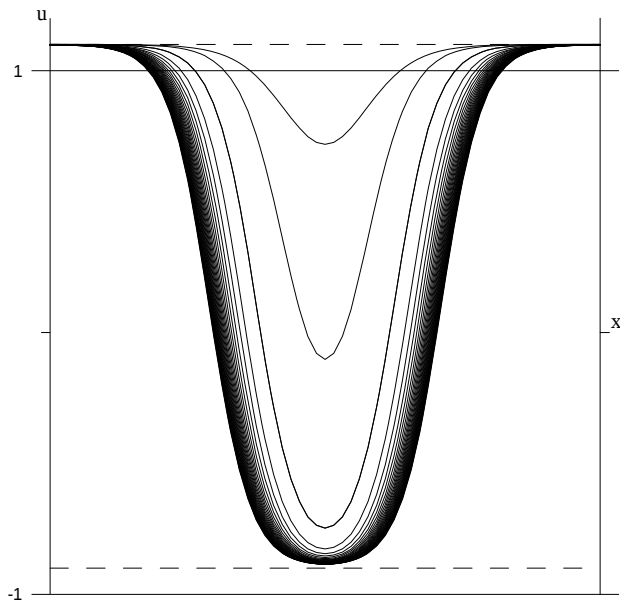


Figure 1. Эволюция нестационарной КС в однородной среде

когда ширина более узкого пятна сравнивается с критической, $W^{(-)} \approx \pi\delta$, начинается быстрый процесс разрушения КС.

Зависимость времени жизни асимметричной конфигурации магнитного поля с широким положительным пятном $W^{(+)} = 10\pi\delta$ от ширины отрицательного пятна показана на рис. 2, коэффициенты диффузии и генерации единичные: $\mu = 1$, $\gamma_0 = 1$. По горизонтальной оси отложено отношение ширины отрицательного пятна в начальный момент времени, $W^{(-)}(t_0)$, к критическому значению $W_0 = \pi\delta$. Фиксировался момент времени, когда отрицательное пятно полностью исчезает и функция u в пределах одного периода становится положительной. По вертикальной оси отложен десятичный логарифм времени жизни. Очевидно, что график $t(W)$ неотличим от прямой линии. Угол наклона по графику рис. 2 $\text{tg } \psi \approx 1.912$, где

$$\text{tg } \psi = \frac{\lg t_2 - \lg t_1}{W_2/W_0 - W_1/W_0}. \text{ Приближенная формула (10) дает значение } \text{tg } \psi = \frac{\pi\sqrt{2}}{\ln 10} \approx 1.92952. \text{ Это}$$

хорошее совпадение, поэтому приближенными формулами для скорости дрейфа ВПС и времени жизни КС можно пользоваться не только для случая широких пятен КС, но и при менее жестких ограничениях: $W^{(+)} \gg W^{(-)}$, $W^{(-)} > \pi\delta$. Более подробный анализ результатов компьютерного моделирования показывает, что погрешность формулы для времени жизни не превышает 1%. Из рис. 2 видно, что КС живет практически бесконечно большое время $t > 10000$, если ширина обоих пятен (положительного и отрицательного) превышает критическую ширину $\pi\delta$ не менее чем в три раза. В то же самое время, если ширина пятна превышает критическую только в 2 раза, время жизни КС уменьшается в тридцать раз. Наконец, пятно с толщиной порядка критической разрушается практически мгновенно. Эти результаты подтверждают предположение о лавинообразном характере процесса разрушения КС на поздней стадии, которая начинается, когда толщина пятна становится сравнимой с критическим значением.

Литература

1. Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М., Наука, 1984.
2. Ruzmaikin A.A., Shukurov A.M. & Sokoloff D.D., 1988, Magnetic Fields of Galaxies, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.
3. Poezd A.D., Shukurov A.M., Sokoloff D.D., 1993, MNRAS 264, 285

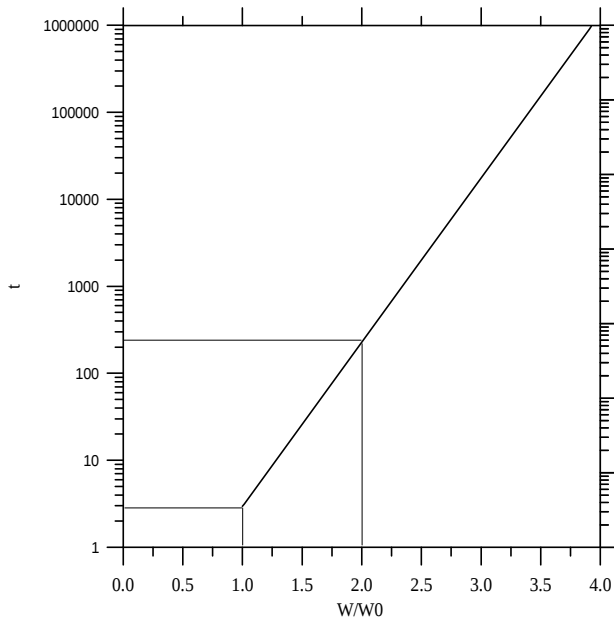


Figure 2. Время жизни нестационарной КС в однородной среде

4. Beck R., Brandenburg A., Moss D., Shukurov A., Sokoloff D., 1996, ARAA 34, 153
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.:Высшая школа, 1990.
6. Васильева А.Б. Об устойчивости контрастных структур. //Матем. моделирование 1991. Т.3. N4. С.114-123.
7. Васильева А.Б. Контрастные структуры типа ступеньки для сингулярно возмущенных квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка. //ЖВМ 1995. Т.35. N4. С.520-531.
8. Янке Э., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. - М.:Наука, 1968.

2.6 Список заданий практикума

2.6.1 Постановка задачи

Рассмотрим стационарную задачу

$$\begin{aligned}Vu_x &= k^2 u_{xx} + \gamma f(u), \\ f(u) &= -(u - U_1)(u - U_2)(u - U_3), \\ U_1 &< U_2 < U_3,\end{aligned}$$

Требуется найти такое значение V , при котором существует решение уравнения на всей числовой оси с граничными условиями $u(x) \rightarrow U_1 + 0$ при $x \rightarrow -\infty$, $u(x) \rightarrow U_3 - 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

2.6.2 Перенос граничного условия в конечную точку в левой области

Перенесем граничные условия в конечные точки,

$$\begin{aligned}x \rightarrow -\infty, \quad u(x) &= U_1 + v(x), \\Vu_x &= k^2 u_{xx} - \gamma(u - U_1)(u - U_2)(u - U_3), \\V(U_1 + v)_x &= k^2 (U_1 + v)_{xx} - \gamma v(U_1 + v - U_2)(U_1 + v - U_3), \\Vv_x &= k^2 v_{xx} - \gamma v(U_2 - U_1 - v)(U_3 - U_1 - v), \\ \text{Линеаризация,} \\Vv_x &= k^2 v_{xx} - \gamma v(U_2 - U_1)(U_3 - U_1), \\v &= e^{\lambda x},\end{aligned}$$

$$k^2 \lambda^2 - V \lambda - \gamma(U_2 - U_1)(U_3 - U_1) = 0,$$

$$\lambda_a = \frac{V \pm \sqrt{V^2 + 4k^2 \gamma(U_2 - U_1)(U_3 - U_1)}}{2k^2},$$

$$\lambda_{(a+)} = \frac{V + \sqrt{V^2 + 4k^2 \gamma(U_2 - U_1)(U_3 - U_1)}}{2k^2},$$

$$v = C e^{\lambda_{(a+)} x} \text{ при } x \rightarrow -\infty,$$

$$v_x = C \lambda_{(a+)} e^{\lambda_{(a+)} x} \text{ при } x \rightarrow -\infty,$$

$$v_x = \lambda_{(a+)} v \text{ при } x \rightarrow -\infty,$$

$$u_x = \lambda_{(a+)}(u - U_1) \text{ при } x \rightarrow -\infty,$$

это и есть граничные условия на левом конце $x = a$.

2.6.3 Перенос граничного условия в конечную точку в правой области

$$x \rightarrow +\infty, u(x) = U_3 - w(x),$$

$$V u_x = k^2 u_{xx} - \gamma(u - U_1)(u - U_2)(u - U_3),$$

$$V(U_3 - w)_x = k^2(U_3 - w)_{xx} + \gamma w(U_3 - w - U_1)(U_3 - w - U_2),$$

$$-V w_x = -k^2 w_{xx} + \gamma v(U_3 - U_1 - w)(U_3 - U_2 - w),$$

$$V w_x = k^2 w_{xx} - \gamma v(U_3 - U_1 - w)(U_3 - U_2 - w),$$

Линеаризация,

$$V w_x = k^2 w_{xx} - \gamma v(U_3 - U_1)(U_3 - U_2),$$

$$w = e^{\lambda x},$$

$$k^2 \lambda^2 - V \lambda - \gamma(U_3 - U_1)(U_3 - U_2) = 0,$$

$$\lambda_b = \frac{V \pm \sqrt{V^2 + 4k^2 \gamma(U_3 - U_1)(U_3 - U_2)}}{2k^2},$$

$$\lambda_{(b-)} = \frac{V - \sqrt{V^2 + 4k^2 \gamma(U_3 - U_1)(U_3 - U_2)}}{2k^2},$$

$$w = C e^{\lambda_{(b-)} x} \text{ при } x \rightarrow +\infty,$$

$$w_x = C \lambda_{(b-)} e^{\lambda_{(b-)} x} \text{ при } x \rightarrow +\infty,$$

$$w_x = \lambda_{(b-)} w \text{ при } x \rightarrow +\infty,$$

$$u_x = \lambda_{(b-)}(U_3 - u) \text{ при } x \rightarrow +\infty,$$

это и есть граничные условия на правом конце $x = b$.

2.6.4 Методика решения задачи

Пусть заданы $U_1, U_2, U_3, k > 0, \gamma > 0$. Выберем значения a, b , так что $b - a \gg 1$, и некоторое $p > 0, p \ll 1$. Решим задачу Коши

$$\begin{cases} V u_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & a < x < b, \\ u(a) = U_1 + p, \\ u_x(a) = p \lambda_{(a+)}, \end{cases}$$

и вычислим

$$F(V) = u_x(b) - \lambda_{(b-)}(U_3 - u_x(b)).$$

Методом деления отрезка пополам решим уравнение $F(V) = 0$ и представим в качестве результата график функции $u(x)$, которая является решением указанной краевой задачи. Результат будет тем более высокого качества, чем больше величина $b - a$.

2.6.5 Задания по исследованию стационарного внутреннего переходного слоя в однородной среде

1. Пусть заданы $U_1 = -1, U_2 = 0, U_3 = 1, f(u) = (u - U_1)(u - U_2)(U_3 - u), k = 1, \gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3 - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

2. Пусть заданы $f(u) = \sin(\pi u)$, $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3 - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

$U_1 = -1$, $U_2 = 0$, $U_3 = 1$, имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

3. Пусть

$$f(u) = \begin{cases} u(1+u), & x \in (-\infty; 0), \\ Cu(1-u^3), & x \in [0; +\infty) \end{cases}, \text{ причем } C \text{ выбрано так, что } \int_{-1}^1 f(u)du = 0, \text{ и } k = 1, \gamma = 1.$$

Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow -1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow 1 - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

4. Пусть заданы $U_1 = -1$, $U_2 = 0$, $U_3 = 1$, $f(u) = \sqrt[3]{u - U_1}(u - U_2)\sqrt[3]{U_3 - u}$, $k = 1$, $\gamma = 1$.

Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3 - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

5. Пусть заданы $U_1 = -1$, $U_2 = 0$, $U_3 = 1$, $f(u) = (u - U_1)^3(u - U_2)(U_3 - u)^3$, $k = 1$, $\gamma = 1$.

Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3 - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

6. Пусть

$$f(u) = \begin{cases} u(1 - u^2), & x \in (-\infty; 0), \\ Cu(1 - u^3), & x \in [0; +\infty) \end{cases},$$

причем $C > 0$ выбрано так, что $\int_{-1}^1 f(u)du = 0$, и $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow -1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow 1 - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

7. Пусть заданы $U_1 = -1$, $U_2 = 0$, $U_3 = 2$, $f(u) = (u - U_1)(u - U_2)(U_3 - u)$, $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3 - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

8. Пусть

$$f(u) = \begin{cases} u(1 - u^2), & x \in (-\infty; 0), \\ Cu(1 - u), & x \in [0; +\infty) \end{cases},$$

причем C выбрано так, что $\int_{-1}^1 f(u)du = 0$, и $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow -1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow 1 - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

9. Пусть заданы $U_1 = -2$, $U_2 = 0$, $U_3 = 2$,

$$f(u) = \begin{cases} -2(u+2), & x \in (-\infty; -1), \\ 2u, & x \in [-1; 0], \\ u, & x \in [0; 1], \\ -(u-2), & x \in [1; +\infty) \end{cases}, \quad k = 1, \gamma = 1. \text{ Найдите такое значение } V, \text{ что краевая задача}$$

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3 - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

10. Пусть

$$f(u) = \begin{cases} u(1-u^2), & x \in (-\infty; 0), \\ u(1-\frac{u^3}{C^3}), & x \in [0; +\infty) \end{cases},$$

причем $C > 0$ выбрано так, что $\int_{-1}^C f(u) du = 0$, и $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow -1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow C - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

11. Пусть заданы $U_1 = -1$, $U_2 = 0$, $U_3 = 1,1$,

$$f(u) = \begin{cases} u(u-U_1), & x \in (-\infty; 0), \\ u(U_3-u), & x \in [0; +\infty) \end{cases}, \quad k = 1, \gamma = 1. \text{ Найдите такое значение } V, \text{ что краевая задача}$$

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3 - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

12. Пусть заданы $U_1 = -1$, $U_2 = 0$, $U_3 = 1,1$,

$$f(u) = \begin{cases} -u^2(u-U_1), & x \in (-\infty; 0), \\ u^2(U_3-u), & x \in [0; +\infty) \end{cases}, \quad k = 1, \gamma = 1. \text{ Найдите такое значение } V, \text{ что краевая задача}$$

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3 - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

13. Пусть $q = 1,1$,

$$f(u) = \begin{cases} u(1+u), & x \in (-\infty; 0), \\ qu(1-u), & x \in [0; +\infty) \end{cases}, \quad k = 1, \gamma = 1. \text{ Найдите такое значение } V, \text{ что краевая задача}$$

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow -1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow 1 - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

14. Пусть

$$f(u) = \begin{cases} u(1+u), & x \in (-\infty; 0), \\ Cu(1-u^2), & x \in [0; +\infty) \end{cases}, \text{ причем } C \text{ выбрано так, что } \int_{-1}^1 f(u) du = 0, \text{ и } k = 1, \gamma = 1.$$

Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow -1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow 1 - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

3 Нестационарные контрастные структуры в среде с переменными параметрами

3.1 Введение

Контрастными структурами мы называем решения уравнения диффузии с переносом и размножением специального вида. Для определенности будем называть исследуемое скалярное поле концентрацией. Предполагается, что плотность дополнительных источников за счет размножения пропорциональна концентрации, коэффициент пропорциональности, называем коэффициентом размножения. Предположим, что коэффициент размножения зависит от концентрации, причем имеется три значения концентрации, при которых коэффициент размножения обращается в нуль, изменяя знак при переходе через эти значения. Первый и третий уровни соответствуют устойчивым состояниям, так что приращение коэффициента размножения противоположно по знаку приращению концентрации. Второй уровень, расположенный между первым и третьим, соответствует неустойчивому состоянию, когда приращение коэффициента размножения имеет тот же знак, что и приращение концентрации. Значение концентрации, соответствующие устойчивым состояниям, называем называем уровнями насыщения.

После завершения быстroteкущих переходных процессов может образоваться решение типа КС, в котором имеются узкие области с большим градиентом концентрации, разделяющие обширные области, где концентрация имеет малый градиент и мало отличается от величины уровня насыщения. Внутри областей с большим градиентом концентрация переходит от одного уровня насыщения к другому, поэтому эти области мы называем внутренними переходными слоями (ВПС). Нас будут интересовать стационарные КС, в которых концентрация не зависит от времени, и нестационарные КС.

В трехмерных и двумерных неоднородных средах эволюция КС определяется в первую очередь кривизной ВПС. Эффекты, связанные с неоднородностью профиля уровня насыщения, в первом приближении не играют роли. Если кривизна ВПС равна нулю, то характер эволюции определяется в первую очередь профилем функции, задающей уровень насыщения.

Для стационарных КС мы выведем трансцендентное уравнение, из которого можно определить возможные положения ВПС. В это уравнение входят коэффициенты диффузии, размножения и логарифмическая производная уровня насыщения. Для нестационарных КС мы определим скорость дрейфа ВПС.

3.2 Положение внутреннего переходного слоя для стационарных контрастных структур

Сделаем при необходимости замену неизвестной функции, так чтобы неустойчивый уровень был равен нулю. Несмотря на то, что нижний уровень насыщения теперь отрицателен, для краткости продолжаем называть исследуемое поле концентрацией. Мы рассматриваем частный случай зависимости коэффициента размножения от концентрации, для которого уровни насыщения равны по величине и противоположны по знаку, коэффициент размножения зависит

от модуля концентрации.

Пусть $\gamma(u)$ – функция, определяющая зависимость коэффициента размножения от концентрации. Разложим эту функцию в ряд Тейлора и оставим первые два члена, отличных от нуля: $\gamma(u) = \gamma_0 \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right)$, γ_0 – коэффициент размножения в приближении малой концентрации.

Таким образом, уравнение диффузии примет вид:

$$u_t + Vu_x = \lambda u_{xx} + \gamma u \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right). \quad (11)$$

Здесь λ – коэффициент диффузии, V – скорость переноса, которую мы считаем постоянной. Плотность источников максимальна при $u = 0$, равна нулю при $u = \pm U$ и отрицательна при $u^2 > U^2$.

Рассмотрим стационарную КС: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$,

$$Vu_x = \lambda u_{xx} + \gamma u \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right). \quad (12)$$

Пусть $D(x)$ – постоянная величина вне некоторого конечного отрезка $x_a < x < x_b$, $D(x) = D_a$, $x < x_a$, $D(x) = D_b$, $x > x_b$, а на этом отрезке $D(x)$ – дифференцируемая функция, причем $D_x \ll D$, $D_{xx} \ll D$.

Сделаем замену $u(x) = w(x)D(x)$. После преобразований получаем:

$$\left(V - 2\lambda \frac{D_x}{D}\right) w_x = \lambda w_{xx} + \left(\lambda \frac{D_{xx}}{D} - V \frac{D_x}{D}\right) w + \gamma w (1 - w^2). \quad (13)$$

Мысленно припишем к левой части слагаемое w_t и посмотрим на это уравнение, как на нестационарное уравнение диффузии с переносом и размножением. Коэффициент размножения здесь $\lambda D_{xx}/D - VD_x/D + \gamma(1 - w^2)$. Поскольку на функцию $D(x)$ наложены требования $D_x \ll D$ и $D_{xx} \ll D$, то первые два слагаемых в этом коэффициенте размножения малы и не изменяют картины устремления функции w к уровню насыщения. А уровень насыщения для (13) – единица, то есть константа всюду. Предположим, что мы нашли $w(x)$ – решение типа КС уравнения (13). Пусть у него только один ВПС. Пусть в точке x_0 $w(x)$ обращается в ноль. Очевидно, что x_0 находится внутри ВПС, можно даже сказать – посередине ВПС. Поскольку уровень насыщения для $w(x)$ постоянен, получаем, что ВПС будет дрейфовать со скоростью $v = (V - 2\lambda D_x(x)/D(x))|_{x=x_0}$ (см. [2]). ВПС остановится в x_0 , если $(V - 2\lambda D_x(x)/D(x))|_{x=x_0} = 0$. Такая точка x_0 называется точкой стояния (обозначим ее как s), а соответствующая $w(x)$ будет решением типа КС стационарного уравнения (13). Возвращаясь теперь от $w(x)$ к $u(x)$ ($u(x) = w(x)D(x)$), получаем уравнение для определения точек стояния решения типа КС уравнения (11):

$$V - 2\lambda \frac{D_x(s)}{D(s)} = 0 \quad (14)$$

Если точек несколько – s_i , это значит, что есть несколько решений с нулями в этих точках: $u_i(s_i) = 0$.

Итак, точки стояния найдены. Посмотрим, что будет с ВПС, если он расположен не в точке стояния (точка, в которой $u(x) = 0$ по прежнему обозначается x_0). Направление дрейфа указывает знак функции $V - 2\lambda D_x(x_0)/D(x_0)$: плюс означает дрейф вправо, а минус – влево. Если при переходе через ноль (в точке стояния), функция $V - 2\lambda D_x/D$ меняет знак с плюса на минус, то при расположении ВПС левее точки стояния, он будет дрейфовать вправо, а при расположении правее – влево. Такая точка стояния называется устойчивой. Если же при

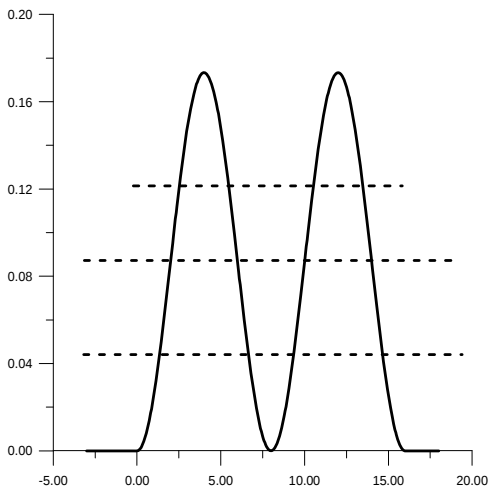


Figure 3. Значение скорости переноса V для стационарного решения

переходе через точку стояния $V - 2\lambda D_x/D$ меняет знак с минуса на плюс, любое отклонение положения ВПС от точки стояния будет способствовать еще большему его удалению от точки стояния. Такая точка стояния называется неустойчивой.

3.3 Компьютерный эксперимент

Сформулируем задачу, которую мы будем численно решать:

$$Vu_x = \lambda u_{xx} + \gamma u \left(1 - \frac{u^2}{D^2}\right), \quad x \in [x_L, x_R], \quad (15)$$

где V, λ, γ — константы, а $D(x)$ — заданная функция. В нашем эксперименте

$$D(x) = \begin{cases} D_a & \text{при } x < x_a, \\ D_a \left(\frac{D_b}{D_a}\right)^{\left(\frac{x-x_a}{l} - \frac{\sin \frac{4\pi(x-x_a)}{l}}{4\pi}\right)} & \text{при } x_a \leq x \leq x_b, \\ D_b & \text{при } x > x_b. \end{cases} \quad (16)$$

Числовые значения: $x_L = -3$, $x_a = 0$, $x_b = 16$, $x_R = 18$, $l = x_b - x_a = 21$, $\lambda = 1$, $\gamma = 1$. Толщина погранслоя $\Pi = \sqrt{\gamma/\lambda}$, $\Pi = 1$. Используется метод стрельбы. Расчеты проводились с тремя различными скоростями V , что удобно изобразить в виде рис. 3. На рис. 4 изображено графическое решение уравнения $2\lambda D_x(x)/D(x) = V$ для $V = 0.0433; 0.0866; 0.12$, которое говорит нам, что для каждой из этих скоростей должно получиться по четыре стационарных контрастных структуры. Численное решение уравнения (15) показывает, что так оно и есть. Графики решений показаны на рис. 4. Жирными точками показаны точки стояния, найденные по формуле (14). Хорошее совпадение корней уравнения $V - 2\lambda D_x(x)/D(x) = 0$ с численными результатами имеется только для скорости $V = 0.0866$: аналитически - $s = 2, 6, 10, 14$, численно - $s = 2.05; 5.99; 10.01; 13.96$, что говорит об области применимости формулы (14): скорость должна быть равна

$$V = \frac{1}{2} \max 2\lambda \frac{D_x(x)}{D(x)}. \quad (17)$$

Было проведено также решение нестационарного уравнения (11). В качестве начальной бралась знакопеременная монотонная функция. Один из примеров решения такой задачи приведен на Рис. 5. Решение довольно быстро переходит в контрастную структуру, а далее происходит дрейф ВПС.

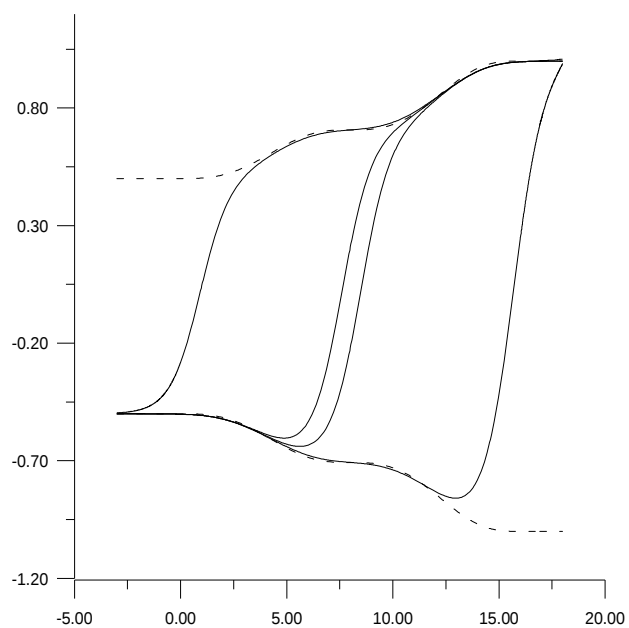


Figure 4. Стационарная КС в неоднородной среде с переносом

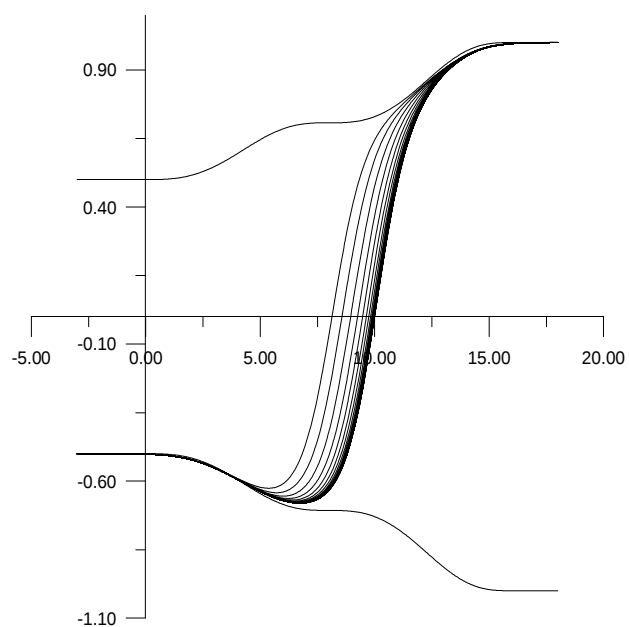


Figure 5. Эволюция нестационарной КС в неоднородной среде с переносом

На рис. 5. показан случай, когда ВПС изначально расположен между неустойчивой и устойчивой точкой стояния – ВПС дрейфует вправо, постепенно замедляется и останавливается. Если расположить ВПС правее устойчивой точки стояния, то можно наблюдать обратный дрейф – при положительной скорости переноса V ВПС дрейфует влево.

3.3.1 Задания по исследованию стационарного внутреннего переходного слоя в неоднородной среде

1. Пусть

$$f(u) = \begin{cases} u(1 - \frac{u^2}{U_1^2}), & x \in (-\infty; 0), \\ u(1 - \frac{u^2}{U_3^2}), & x \in [0; +\infty) \end{cases},$$

причем $U_1 = 1$, $U_3 = \frac{11}{10}$, и $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow -U_1 + 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3 - 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

2. Пусть $f(u) = -(u - U_1(x))(u - U_2(x))(u - U_3(x))$,

$$U_2(x) = \begin{cases} U_2^{(I)}, & x \in (-\infty; -a), \\ U_2^{(I)} + \frac{x+a}{2a}(U_2^{(III)} - U_2^{(I)}), & x \in [-a; a], \\ U_2^{(III)}, & x \in (a; +\infty), \end{cases}$$

$$U_1(x) = -1,$$

$$U_3(x) = 1,$$

причем $U_2^{(I)} = -0,2$, $U_2^{(III)} = 0,2$, и $a = 5$, $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1(-\infty) + 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3(+\infty) - 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

3. Пусть

$$f(u) = \begin{cases} u(1 - \frac{u^2}{U_1^2}), & x \in (-\infty; -a), \\ u(1 - \frac{u^2}{U_2^2(x)}), & x \in [-a; a], \\ u(1 - \frac{u^2}{U_3^2}), & x \in (a; +\infty) \end{cases}$$

причем $U_1 = 1$, $U_3 = \frac{11}{10}$, $U_2(x) = U_1 + \frac{x+a}{2a}(U_3 - U_1)$, $x \in [-a; a]$, и $a = 5$, $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow -U_1 + 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3 - 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

4. Пусть $f(u) = -(u - U_1(x))(u - U_2(x))(u - U_3(x))$,

$U_1(x) = -1$, $U_3(x) = \frac{x}{63}$, $U_2(x) = 1$, $a = 5$, $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1(-29) + 0 \text{ при } x \rightarrow -29 + 0, \\ u(x) \rightarrow U_3(+29) - 0 \text{ при } x \rightarrow +29 - 0, \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

5. Пусть $f(u) = -(u - U_1(x))(u - U_2(x))(u - U_3(x))$,

Методы компьютерной математики, семестр 3, задача 3.3

$$U_1(x) = \begin{cases} U_1^{(I)}, & x \in (-\infty; -a), \\ U_1^{(I)} + \frac{x+a}{2a}(U_1^{(III)} - U_1^{(I)}), & x \in [-a; a], \\ U_1^{(III)}, & x \in (a; +\infty), \end{cases}$$

$$U_2(x) = 0,$$

$$U_3(x) = \begin{cases} U_3^{(I)}, & x \in (-\infty; -a), \\ U_3^{(I)} + \frac{x+a}{2a}(U_3^{(III)} - U_3^{(I)}), & x \in [-a; a], \\ U_3^{(III)}, & x \in (a; +\infty), \end{cases}$$

причем $U_1^{(I)} = -1, 2$, $U_1^{(III)} = -1$, $U_3^{(I)} = 1$, $U_3^{(III)} = 1, 2$, и $a = 5$, $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1(-\infty) + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3(+\infty) - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

6. Пусть

$$f(u) = \begin{cases} u(1 - \frac{u^2}{U_1^2}), & x \in (-\infty; 0), \\ u(1 - \frac{u^2}{U_3^2}), & x \in [0; +\infty) \end{cases},$$

причем $U_1 = \frac{11}{10}$, $U_3 = 1$, и $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow -U_1 + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3 - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

7. Пусть $f(u) = -(u - U_1(x))(u - U_2(x))(u - U_3(x))$,

$$U_1(x) = \begin{cases} U_1^{(I)}, & x \in (-\infty; -a), \\ U_1^{(I)} + \frac{x+a}{2a}(U_1^{(III)} - U_1^{(I)}), & x \in [-a; a], \\ U_1^{(III)}, & x \in (a; +\infty), \end{cases}$$

$$U_2(x) = 0,$$

$$U_3(x) = \begin{cases} U_3^{(I)}, & x \in (-\infty; -a), \\ U_3^{(I)} + \frac{x+a}{2a}(U_3^{(III)} - U_3^{(I)}), & x \in [-a; a], \\ U_3^{(III)}, & x \in (a; +\infty), \end{cases}$$

причем $U_1^{(I)} = -1$, $U_1^{(III)} = -1, 1$, $U_3^{(I)} = 1$, $U_3^{(III)} = 1, 1$, и $a = 5$, $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1(-\infty) + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3(+\infty) - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

8. Пусть $f(u) = -(u - U_1(x))(u - U_2(x))(u - U_3(x))$,

$$U_1(x) = \begin{cases} U_1^{(I)}, & x \in (-\infty; -a), \\ U_1^{(I)} + \frac{1}{2}[1 + \sin(\frac{\pi x}{2a})](U_1^{(III)} - U_1^{(I)}), & x \in [-a; a], \\ U_1^{(III)}, & x \in (a; +\infty), \end{cases}$$

$$U_2(x) = 0,$$

$$U_3(x) = \begin{cases} U_3^{(I)}, & x \in (-\infty; -a), \\ U_3^{(I)} + \frac{1}{2}[1 + \sin(\frac{\pi x}{2a})](U_3^{(III)} - U_3^{(I)}), & x \in [-a; a], \\ U_3^{(III)}, & x \in (a; +\infty), \end{cases}$$

причем $U_1^{(I)} = -1$, $U_1^{(III)} = -1, 1$, $U_3^{(I)} = 1$, $U_3^{(III)} = 1, 1$, и $a = 5$, $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

Методы компьютерной математики, семестр 3, задача 3.3

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1(-\infty) + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3(+\infty) - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

9. Пусть $f(u) = -(u - U_1(x))(u - U_2(x))(u - U_3(x))$,

$$U_1(x) = \begin{cases} U_1^{(I)}, & x \in (-\infty; -a), \\ U_1^{(I)} + \frac{x+a}{2a}(U_1^{(III)} - U_1^{(I)}), & x \in [-a; a], \\ U_1^{(III)}, & x \in (a; +\infty), \end{cases}$$

$$U_2(x) = 0,$$

$$U_3(x) = \begin{cases} U_3^{(I)}, & x \in (-\infty; -a), \\ U_3^{(I)} + \frac{x+a}{2a}(U_3^{(III)} - U_3^{(I)}), & x \in [-a; a], \\ U_3^{(III)}, & x \in (a; +\infty), \end{cases}$$

причем $U_1^{(I)} = -1, 1$, $U_1^{(III)} = -1$, $U_3^{(I)} = 1, 1$, $U_3^{(III)} = 1$, и $a = 5$, $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1(-\infty) + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3(+\infty) - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

10. Пусть $f(u) = -(u - U_1(x))(u - U_2(x))(u - U_3(x))$,

$$U_2(x) = \begin{cases} U_2^{(I)}, & x \in (-\infty; -a), \\ U_2^{(I)} + \frac{1}{2}[1 + \sin(\frac{\pi x}{2a})](U_2^{(III)} - U_2^{(I)}), & x \in [-a; a], \\ U_2^{(III)}, & x \in (a; +\infty), \end{cases}$$

$$U_1(x) = -1,$$

$$U_3(x) = 1,$$

причем $U_2^{(I)} = -0, 1$, $U_2^{(III)} = 0, 1$, и $a = 5$, $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1(-\infty) + 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u(x) \rightarrow U_3(+\infty) - 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

11. Пусть $f(u) = -(u - U_1(x))(u - U_2(x))(u - U_3(x))$,

$U_1(x) = -\frac{x+77}{77}$, $U_2(x) = 0$, $U_3(x) = \frac{x+59}{59}$, $a = 5$, $k = 1$, $\gamma = 1$. Найдите такое значение V , что краевая задача

$$\begin{cases} Vu_x = k^2 u_{xx} + \gamma f(u), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x) \rightarrow U_1(-38) + 0 & \text{при } x \rightarrow -38 + 0, \\ u(x) \rightarrow U_3(+38) - 0 & \text{при } x \rightarrow +38 - 0, \end{cases}$$

имеет решение. Найдите также это решение и представьте график.

Литература.

1. Быков А.А., Попов В.Ю. О времени жизни одномерных нестационарных контрастных структур. // ЖВМ 1998.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.:Высшая школа, 1990.
3. Васильева А.Б. Об устойчивости контрастных структур. //Матем. моделирование 1991. Т.3. N4. С.114-123.
4. Васильева А.Б. Контрастные структуры типа ступеньки для сингулярно возмущенных квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка. //ЖВМ 1995. Т.35. N4. С.520-531.

А.А. Быков, В.В. Воеводин, О.В. Козырева, В.Ю. Попов, Д.Д. Соколов. Поверхностное натяжение контрастных структур. Доклады Академии Наук, 1999, т.364, N 3.

А.А. Быков, В.Ю. Попов. О времени жизни одномерных нестационарных контрастных структур. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1999, т.309, N 2, стр. 280-288 (266-273 в англ. варианте)

А.А. Быков, В.Ю. Попов. Градиентный дрейф одномерной нестационарной контрастной структуры в неоднородной среде. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1999, т.309, N 3, стр. 458-471 (435-447 в англ. варианте)

А.А. Быков, В.Ю. Попов, В.В. Воеводин, О.В. Козырева, Д.Д. Соколов Эволюция двумерных контрастных структур сложной формы. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1999, т.309, N 5, стр. 803-813