

1.4 Уравнение эллиптического типа общего вида

0.1. Течение тока в среде с переменной проводимостью

0.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = -f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad u|_{\Gamma} = \varphi(M), \quad \text{где } \Gamma - \text{граница области } D.$$

0.1.2. Разностная схема на пятиточечном шаблоне «крест»

Запишем уравнение в виде

$$(ku_x)_x + (ku_y)_y = -f(x, y)$$

и составим девятиточечный шаблон

u1	u2	u3
u4	u5	u6
u7	u8	u9

Используя формулу $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = k \Delta u + \operatorname{grad} k \operatorname{grad} u$, перепишем в равносильном виде $ku_{xx} + ku_{yy} + k_x u_x + k_y u_y = -f(x, y)$.

Разностная схема

$$k_5 \frac{u_6 - 2u_5 + u_4}{h_x^2} + k_5 \frac{u_2 - 2u_5 + u_8}{h_y^2} + \frac{k_6 - k_4}{2h_x} \cdot \frac{u_6 - u_4}{2h_x} + \frac{k_2 - k_8}{2h_y} \cdot \frac{u_2 - u_8}{2h_y} = -f_5,$$

использует только 5 значений функции на шаблоне «крест». Запишем в стандартной форме,

$$\begin{cases} a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \\ + a_4 u_4 + a_5 u_5 + a_6 u_6 \\ + a_7 u_7 + a_8 u_8 + a_9 u_9 = -f, \end{cases}$$

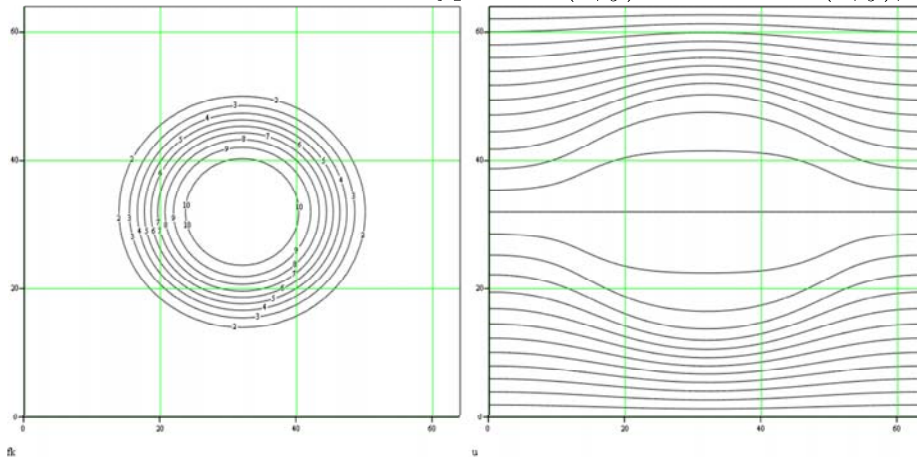
где

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{k_5}{h_y^2} + \frac{k_2 - k_8}{4h_x h_y}, \quad a_3 = 0,$$

$$a_4 = \frac{k_5}{h_x^2} - \frac{k_6 - k_4}{4h_x h_y}, \quad a_5 = -2\frac{k_5}{h_x^2} - 2\frac{k_5}{h_y^2}, \quad a_6 = \frac{k_5}{h_x^2} + \frac{k_6 - k_4}{4h_x h_y},$$

$$a_7 = 0, \quad a_8 = \frac{k_5}{h_y^2} - \frac{k_2 - k_8}{4h_x h_y}, \quad a_9 = 0,$$

Пример карта линий равного уровня $k(x, y)$ и решение $u(x, y)$,



0.1.3. Течение тока в среде с эффектом Холла

Рассмотрим уравнение $\operatorname{div} \vec{J} = 0$, где $\sigma \vec{E} = \vec{J} + [\vec{J} \times \vec{B}]$, и $\vec{E} = -\operatorname{grad} u$.

$$\sigma(E_x, E_y, E_z) = (J_x, J_y, J_z) + (J_y B_z - J_z B_y, J_z B_x - J_x B_z, J_x B_y - J_y B_x),$$

$$\begin{cases} J_x + J_y B_z - J_z B_y = E_x, \\ J_y + J_z B_x - J_x B_z = E_y, \\ J_z + J_x B_y - J_y B_x = E_z, \end{cases}$$

рассматриваем только случай $\frac{\partial}{\partial z} = 0$,

$$\vec{B} = (B_x(x, y), B_y(x, y), 0), u = u(x, y), \vec{E} = (E_x(x, y), E_y(x, y), 0),$$

$$\begin{cases} J_x - J_z B_y = E_x, \\ J_y + J_z B_x = E_y, \\ J_z + J_x B_y - J_y B_x = 0, \\ J_z = -J_x B_y + J_y B_x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_x - (-J_x B_y + J_y B_x) B_y = E_x, \\ J_y + (-J_x B_y + J_y B_x) B_x = E_y, \\ J_z = -J_x B_y + J_y B_x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 + B_y^2) J_x - J_y B_x B_y = E_x, \\ -J_x B_x B_y + (1 + B_x^2) J_y = E_y. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + B_y^2 & -B_x B_y \\ -B_x B_y & 1 + B_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + B_y^2 & -B_x B_y \\ -B_x B_y & 1 + B_x^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + B_y^2 & -B_x B_y \\ -B_x B_y & 1 + B_x^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}, \text{ отсюда находим тензор проводимости.}$$

0.1.4. Список задач для самостоятельного решения

1. Решите краевую задачу $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $a = 10, b = 10$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = U_0$, $u(0, y) = U_0 y/b$, $u(a, y) = U_0 y/b$, $U_0 = 10$,

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & \rho(M, M_0) > R, \\ 1 + C \cos\left(\frac{\pi \rho(M, M_0)}{2R}\right), & \rho(M, M_0) \leq R, \end{cases} \text{ координаты точек } M(x, y), M_0(x_0, y_0), x_0 = a/2,$$

$$y_0 = b/2, R = \frac{1}{3} \max(a, b), C = 3.$$

2. Решите краевую задачу $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $a = 10, b = 10$, $u(x, 0) = 0$,

$$u(x, b) = U_0, u_x(0, y) = 0, u_x(a, y) = 0, k(x, y) = \begin{cases} 1, & \rho(M, M_0) > R, \\ 1 + C \cos\left(\frac{\pi \rho(M, M_0)}{2R}\right), & \rho(M, M_0) \leq R, \end{cases} \text{ координаты}$$

$$\text{точек } M(x, y), M_0(x_0, y_0), x_0 = a/2, y_0 = b/2, R = \frac{1}{3} \max(a, b), C = 3.$$

3. Решите краевую задачу $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $a = 10, b = 10$, $u(x, 0) = 0$,

$$u(x, b) = U_0, u_x(0, y) = 0, u_x(a, y) = 0, k(x, y) = \begin{cases} 1, & \rho(M, M_0) > R, \\ 1 + C \cos\left(\frac{\pi \rho(M, M_0)}{2R}\right), & \rho(M, M_0) \leq R, \end{cases} \text{ координаты}$$

$$\text{точек } M(x, y), M_0(x_0, y_0), x_0 = a/2, y_0 = b/2, R = \frac{1}{3} \max(a, b), C = 3.$$

4. Решите краевую задачу $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $a = 10, b = 10$, $u(x, 0) = 0$,

$$u(x, b) = U_0, u_x(0, y) = 0, u_x(a, y) = 0, k(x, y) = k_1(x, y) + k_2(x, y),$$

$$k_j(x, y) = \begin{cases} 1, & \rho(M, M_j) > R_j, \\ 1 + C_j \cos\left(\frac{\pi \rho(M, M_j)}{2R_j}\right), & \rho(M, M_j) \leq R_j, \end{cases} \text{ координаты точек } M_j(x_j, y_j), R_j, C_j \text{ подберите самостоятельно.}$$

5. Решите краевую задачу $\operatorname{div}(\hat{k} \operatorname{grad} u) = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $a = 10, b = 10$, $u(x, 0) = 0$,

$$u(x, b) = U_0, u_x(0, y) = 0, u_x(a, y) = 0, \hat{k}(x, y) = \begin{pmatrix} k_{11}(x, y) & k_{12}(x, y) \\ k_{21}(x, y) & k_{22}(x, y) \end{pmatrix}, \text{ тензор проводимости } \hat{k}$$

возьмите в виде матрицы оператора поворота на угол $\varphi(x, y)$, где

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0, & \rho(M, M_0) > R, \\ \frac{C}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi \rho(M, M_0)}{R}\right)\right), & \rho(M, M_0) \leq R, \end{cases} \text{ координаты точек } M(x, y), M_0(x_0, y_0),$$

$$x_0 = a/2, y_0 = b/2, R = \frac{1}{3} \max(a, b), C = \frac{\pi}{4}.$$

Методы компьютерной математики, семестр 1, задача 1.4

Уравнение эллиптического типа общего вида

6. Решите краевую задачу $\operatorname{div}(\hat{k} \operatorname{grad} u) = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $a = 10$, $b = 10$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = U_0$, $u_x(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 0$, $\hat{k}(x, y) = \begin{pmatrix} k_{11}(x, y) & k_{12}(x, y) \\ k_{21}(x, y) & k_{22}(x, y) \end{pmatrix}$, тензор проводимости $\hat{k}$ возьмите в виде $\hat{k}(x, y) = k_0(x, y)A(x, y)$, где

$$k_0(x, y) = \begin{cases} 1, & \rho(M, M_0) > R, \\ 1 + \frac{C_1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi\rho(M, M_0)}{R}\right) \right), & \rho(M, M_0) \leq R, \end{cases} \quad A(x, y) \text{ матрица оператора поворота на}$$

$$\text{угол } \varphi(x, y), \quad \varphi(x, y) = \begin{cases} 0, & \rho(M, M_0) > R, \\ \frac{C}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi\rho(M, M_0)}{R}\right) \right), & \rho(M, M_0) \leq R, \end{cases} \quad \text{координаты точек } M(x, y),$$

$$M_0(x_0, y_0), \quad x_0 = a/2, \quad y_0 = b/2, \quad R = \frac{1}{3} \max(a, b), \quad C = \frac{\pi}{4}.$$

7. Решите краевую задачу $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $a = 10$, $b = 10$, $u(x, 0) = 0$,

$$u(x, b) = U_0, \quad u_x(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = 0, \quad k(x, y) = \begin{cases} 1, & \rho(M, M_0) > R, \\ 1 + \frac{C}{2} + \frac{C}{2} \cos\left(\frac{\pi\rho(M, M_0)}{R}\right), & \rho(M, M_0) \leq R, \end{cases}$$

$$\text{координаты точек } M(x, y), \quad M_0(x_0, y_0), \quad x_0 = a/2, \quad y_0 = b/2, \quad R = \frac{1}{3} \max(a, b), \quad C = -\frac{3}{4}.$$

8. Решите краевую задачу $\operatorname{div} \vec{J} = 0$, $\sigma \vec{E} = \vec{J} + [\vec{J} \times \vec{B}]$, $\vec{E} = -\operatorname{grad} u$, $0 < x < a$, $0 < y < b$,

$a = 10$, $b = 10$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = U_0$, $u_x(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 0$, нормированное векторное поле $\vec{B}$ возьмите в виде $B_x = -Cy$, $B_y = Cx$, исследуйте $C \in (0; 10)$.

9. Решите краевую задачу $\operatorname{div} \vec{J} = 0$, $\sigma \vec{E} = \vec{J} + [\vec{J} \times \vec{B}]$, $\vec{E} = -\operatorname{grad} u$, $0 < x < a$, $0 < y < b$,

$a = 10$, $b = 10$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = U_0$, $u_x(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 0$, нормированное векторное поле $\vec{B}$ возьмите в виде $\vec{B}(x, y) = \begin{cases} \vec{B}_1(x, y), & \rho(M, M_0) < R, \\ \vec{B}_2(x, y), & \rho(M, M_0) \geq R, \end{cases}$ где $B_{1x}(x, y) = -Cy/R$, $B_{1y} = Cx/R$,

$$B_{2x}(x, y) = -C \frac{Ry}{x^2 + y^2}, \quad B_{2y}(x, y) = C \frac{Rx}{x^2 + y^2},$$

10. Решите краевую задачу $\operatorname{div} \vec{J} = 0$, $\sigma \vec{E} = \vec{J} + [\vec{J} \times \vec{B}]$, $\vec{E} = -\operatorname{grad} u$, $0 < x < a$, $0 < y < b$,

$a = 10$, $b = 10$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = U_0$, $u_x(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 0$, нормированное векторное поле $\vec{B}$ возьмите в виде $B_x(x, y) = Cy$, $B_y = Cy$.

11. Решите краевую задачу $\operatorname{div} \vec{J} = 0$, $\sigma \vec{E} = \vec{J} + [\vec{J} \times \vec{B}]$, $\vec{E} = -\operatorname{grad} u$, $0 < x < a$, $0 < y < b$,

$a = 10$, $b = 10$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = U_0$, $Lu(0, y) = 0$, $Lu(a, y) = 0$, нормированное векторное поле $\vec{B}$ возьмите в виде $B_x(x, y) = C$, $B_y = C$. Граничные условия на левой и правой стенках возьмите в виде условий непротекания тока, $J_x(0, y) = 0$, $J_x(a, y) = 0$.

12. Решите краевую задачу $\operatorname{div} \vec{J} = 0$, $\sigma \vec{E} = \vec{J} + [\vec{J} \times \vec{B}]$, $\vec{E} = -\operatorname{grad} u$, $0 < x < a$, $0 < y < b$,

$a = 10$, $b = 10$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = U_0$, $u_x(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 0$, нормированное векторное поле $\vec{B}$ возьмите в виде $B_x(x, y) = C_1$, $B_y = C_2 \frac{y - y_0}{b}$, $y_0 = b/2$, $C_1 = 1$, $C_2 = 3$.