

Семестр 7, задача 3.

7.3 Метод коллокации для решения задачи рассеяния электромагнитных волн

Список заданий. *Задание I (простое):* Решите двумерную задачу рассеяния плоской волны (или направляемой волноводной моды) на периодической границе раздела двух однородных сред в пространстве (или соответственно на границе раздела двух однородных сред в планарном волноводе).

Задание II (средней сложности): Проведите численный эксперимент для исследования возможности разложения поля в одномерный ряд Фурье в однородной части пространства вплоть до границы раздела. Выясните, что происходит при нарушении сходимости рядов.

Задание III (сложное): Исследуйте аномалии Вуда (особенности поведения рассеянного поля вблизи границы раздела при условии скольжения одной из рассеянных плоских волн вдоль границы раздела).

7.3.1 Решение уравнения Гельмгольца в неограниченной области с периодической границей

Рассмотрим двумерную задачу о распространении волн в пространстве:

$$\Delta u + k_1^2 u = 0, \quad y > f(x), \quad \Delta u + k_2^2 u = 0, \quad y < f(x),$$

$$u|_{y=f(x)-0} = u|_{y=f(x)+0}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{y=f(x)-0} = \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{y=f(x)+0},$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_1}, \quad k_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_2}.$$

Граница раздела $y = f(x)$ является гладкой периодической функцией с периодом T , т.е.

$f(x + T) = f(x)$. Предположим, что в верхней части плоскости, $y > f(x)$, имеется падающая волна $u_0 = e^{ik_1(x \cos \varphi - y \sin \varphi)}$. Поле u_0 удовлетворяет условию Флоке,

$u_0(x + T, y) = e^{ik_1 T \cos \varphi} \cdot u_0(x, y)$, или $u_0(x + T, y) = e^{i\mu} \cdot u_0(x, y)$, $\mu = k_1 T \cos \varphi$. Рассмотрим только такие поля, которые во всем пространстве удовлетворяют тому же условию Флоке:

$u(x + T, y) = e^{i\mu} \cdot u(x, y)$. Заметим, что тогда функция $\tilde{u} \stackrel{\text{def}}{=} u \cdot e^{-ix\mu/T}$ является периодической с

периодом T , $\tilde{u}(x + T, y) = \tilde{u}(x, y)$, поэтому $\tilde{u} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi n}{T}x} \cdot Y_n(y)$. Уравнение Гельмгольца

позволяет определить зависимость $Y(y)$: $\tilde{u}_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi n}{T}x} \cdot \left(A_n e^{i\gamma_n^{(1)}y} + B_n e^{-i\gamma_n^{(1)}y} \right), \quad y > f(x),$

$\tilde{u}_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi n}{T}x} \cdot \left(C_n e^{i\gamma_n^{(2)}y} + D_n e^{-i\gamma_n^{(2)}y} \right), \quad y < f(x)$. Здесь $\gamma_n^{(j)} = \sqrt{k_j^2 - \left(\frac{\mu + 2\pi n}{T} \right)^2}$, $\text{Re } \gamma_n^{(j)} \geq 0$, $\text{Im } \gamma_n^{(j)} \geq 0$.

Таким образом,

$$u_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu + 2\pi n}{T}x} \cdot \left(A_n e^{i\gamma_n^{(1)}y} + B_n e^{-i\gamma_n^{(1)}y} \right), \quad y > f(x),$$

$$u_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu + 2\pi n}{T}x} \cdot \left(C_n e^{i\gamma_n^{(2)}y} + D_n e^{-i\gamma_n^{(2)}y} \right), \quad y < f(x).$$

Приближенное решение будем искать в виде

$$u_1^{(N)} = \sum_{n=-N}^N e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x} \cdot \left(A_n^{(N)} e^{i\gamma_n^{(1)}y} + B_n e^{-i\gamma_n^{(1)}y} \right), \quad y > f(x),$$

$$u_2^{(N)} = \sum_{n=-N}^N e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x} \cdot \left(C_n e^{i\gamma_n^{(2)}y} + D_n^{(N)} e^{-i\gamma_n^{(2)}y} \right), \quad y < f(x).$$

Граничные условия в форме условий излучения имеют вид $B_0 = 1$; $B_n = 0$, $n \neq 0$, $C_n = 0$.

Теперь опишем собственно метод коллокации. Пусть $x_k = \frac{kT}{2N}$, $k \in \{0, 1, \dots, 2N\}$, $y_k = f(x_k)$.

Для производной по нормали получим формулу $\frac{\partial u}{\partial n} = u_x \cdot n_x + u_y \cdot n_y$, $n_x = -\frac{f'}{1 + (f')^2}$,

$$n_y = \frac{1}{1 + (f')^2}.$$

Условия коллокации имеют вид

$$u_1|_{x=x_k, y=y_k} = u_2|_{x=x_k, y=y_k}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{x=x_k, y=y_k} = \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{x=x_k, y=y_k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, 2N\}.$$

Используя явные выражения для $u_1^{(N)}$, $u_2^{(N)}$, получим первое уравнение коллокации (условие сшивания полей):

$$\sum_{n=-N}^N e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x_k} \cdot \left(A_n^{(N)} e^{i\gamma_n^{(1)}y_k} + B_n e^{-i\gamma_n^{(1)}y_k} \right) = \sum_{n=-N}^N e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x_k} \cdot \left(C_n e^{i\gamma_n^{(2)}y_k} + D_n^{(N)} e^{-i\gamma_n^{(2)}y_k} \right),$$

и второе уравнение коллокации (условие сшивания нормальных производных):

$$\sum_{n=-N}^N \left[\frac{-f'(x_k)}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i\frac{\mu + 2\pi n}{T} + \frac{1}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i\gamma_n^{(1)} \right] \cdot e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x_k} \cdot e^{i\gamma_n^{(1)}y_k} \cdot A_n^{(N)} +$$

$$\sum_{n=-N}^N \left[\frac{-f'(x_k)}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i\frac{\mu + 2\pi n}{T} - \frac{1}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i\gamma_n^{(1)} \right] \cdot e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x_k} \cdot e^{-i\gamma_n^{(1)}y_k} \cdot B_n =$$

$$\sum_{n=-N}^N \left[\frac{-f'(x_k)}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i\frac{\mu + 2\pi n}{T} + \frac{1}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i\gamma_n^{(2)} \right] \cdot e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x_k} \cdot e^{i\gamma_n^{(2)}y_k} \cdot C_n +$$

$$\sum_{n=-N}^N \left[\frac{-f'(x_k)}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i\frac{\mu + 2\pi n}{T} - \frac{1}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i\gamma_n^{(2)} \right] \cdot e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x_k} \cdot e^{-i\gamma_n^{(2)}y_k} \cdot D_n^{(n)}.$$

Каждое из этих условий представляет собой систему линейных алгебраических уравнений.

Запишем эти системы в виде

$$\sum_{n=-N}^N P_{k,n}^{(1)} A_n + \sum_{n=-N}^N Q_{k,n}^{(1)} D_n = G_k^{(1)}, \quad \sum_{n=-N}^N P_{k,n}^{(2)} A_n + \sum_{n=-N}^N Q_{k,n}^{(2)} D_n = G_k^{(2)}, \quad k \in \{0, 1, \dots, 2N\}.$$

Осталось записать явные выражения для матричных элементов и правых частей:

$$P_{k,n}^{(1)} = e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x_k} \cdot e^{i\gamma_n^{(1)}y_k}, \quad Q_{k,n}^{(1)} = -e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x_k} \cdot e^{-i\gamma_n^{(1)}y_k},$$

$$P_{k,n}^{(2)} = \left[\frac{-f'(x_k)}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i\frac{\mu + 2\pi n}{T} + \frac{1}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i\gamma_n^{(1)} \right] \cdot e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x_k} \cdot e^{i\gamma_n^{(1)}y_k}$$

$$Q_{k,n}^{(2)} = \left[-\frac{-f'(x_k)}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i\frac{\mu + 2\pi n}{T} + \frac{1}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i\gamma_n^{(2)} \right] \cdot e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x_k} \cdot e^{-i\gamma_n^{(2)}y_k}$$

$$G_k^{(1)} = - \sum_{n=-N}^N e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x_k} \cdot e^{-i\gamma_n^{(1)}y_k} \cdot B_n + \sum_{n=-N}^N e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x_k} \cdot e^{i\gamma_n^{(2)}y_k} \cdot C_n,$$

$$G_k^{(2)} = \sum_{n=-N}^N \left[-\frac{-f'(x_k)}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i\frac{\mu + 2\pi n}{T} + \frac{1}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i\gamma_n^{(1)} \right] \cdot e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x_k} \cdot e^{-i\gamma_n^{(1)}y_k} \cdot B_n +$$

$$\sum_{n=-N}^N \left[\frac{-f'(x_k)}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i \frac{\mu + 2\pi n}{T} + \frac{1}{1 + (f'(x_k))^2} \cdot i \gamma_n^{(2)} \right] \cdot e^{i \frac{\mu + 2\pi n}{T} x_k} \cdot e^{i \gamma_n^{(2)} y_k} \cdot C_n$$

7.3.2 Список заданий

1. Решите задачу о рассеянии плоской волны TE поляризации на синусоидальной границе раздела двух сред: $f(x) = \alpha \cdot \sin \frac{2\pi x}{T}$. По порядку величины основные параметры задачи могут быть таковы: $T = 1$; $\lambda = 1.8$; $\varphi = 60^\circ$; $\alpha = 0.1$; $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = 2$.

2. Решите задачу о рассеянии плоской волны TM поляризации на синусоидальной границе раздела двух сред: $\frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{y=f(x)-0} = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{y=f(x)+0}$.

3. Решите задачу о рассеянии плоской волны TE поляризации на синусоидальной идеально проводящей поверхности: $u|_{y=f(x)} = 0$.

4. Решите задачу о рассеянии плоской волны TM поляризации на синусоидальной идеально проводящей поверхности: $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{y=f(x)} = 0$.

5. Решите задачу о рассеянии плоской волны TE поляризации на неоднородности в волноводе: $\Delta u + k_1^2 u = 0$, $y > f(x)$, $\Delta u + k_2^2 u = 0$, $y < f(x)$, $u|_{y=f(x)-0} = u|_{y=f(x)+0}$,

$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{y=f(x)-0} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{y=f(x)+0}$, $u(0, y) = 0$; $u(T, y) = 0$. Разложение поля в ряд Фурье имеет в

данном случае вид $u_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi n x}{T} \cdot \left(A_n e^{i \gamma_n^{(1)} y} + B_n e^{-i \gamma_n^{(1)} y} \right)$, $y > f(x)$,

$u_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi n x}{T} \cdot \left(A_n e^{i \gamma_n^{(2)} y} + B_n e^{-i \gamma_n^{(2)} y} \right)$, $y < f(x)$.

6. Решите задачу о рассеянии плоской волны TM поляризации на неоднородности в волноводе: $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{y=f(x)-0} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{y=f(x)+0}$, $u(0, y) = 0$; $u(T, y) = 0$. Разложение поля в ряд Фурье имеет в

данном случае вид $u_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos \frac{\pi n x}{T} \cdot \left(A_n e^{i \gamma_n^{(1)} y} + B_n e^{-i \gamma_n^{(1)} y} \right)$, $y > f(x)$,

$u_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos \frac{\pi n x}{T} \cdot \left(A_n e^{i \gamma_n^{(2)} y} + B_n e^{-i \gamma_n^{(2)} y} \right)$, $y < f(x)$.

7. Решите задачу о рассеянии плоской волны TE поляризации на синусоидальной границе поглощающего диэлектрика. По порядку величины основные параметры задачи могут быть таковы: $T = 1$; $\lambda = 1.8$; $\varphi = 60^\circ$; $\alpha = 0.1$; $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = 3 + i$.

8. Решите задачу о рассеянии плоской волны TM поляризации на синусоидальной границе поглощающего диэлектрика.

9. Решите задачу о рассеянии плоской волны TE поляризации на синусоидальной поверхности диэлектрического волновода. Отличие от основной задачи в том, что дополнительное условие (вместо условия излучения) имеет вид $u|_{x,-h} = 0$, поэтому

$u_2^{(N)} = \sum_{n=-N}^N e^{i \frac{\mu + 2\pi n}{T} x} \cdot \left(C_n e^{i \gamma_n^{(2)} (y+h)} - C_n e^{-i \gamma_n^{(2)} (y+h)} \right)$, $y < f(x)$.

10. Решите задачу о рассеянии плоской волны TM поляризации на синусоидальной поверхности диэлектрического волновода. Теперь $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{x,-h} = 0$, поэтому

$$u_2^{(N)} = \sum_{n=-N}^N e^{i\frac{\mu+2\pi n}{T}x} \cdot \left(C_n e^{i\gamma_n^{(2)}(y+h)} + C_n e^{-i\gamma_n^{(2)}(y+h)} \right), \quad y < f(x).$$

11. Решите задачу о рассеянии волны TE поляризации на синусоидальной поверхности диэлектрической пробки в металлическом волноводе. Отличие от основной задачи в том, что дополнительное условие (вместо условия излучения) имеет вид $u|_{x,-h} = 0$, поэтому

$$u_2^{(N)} = \sum_{n=1}^N \sin \frac{\pi n x}{T} \cdot \left(C_n e^{i\gamma_n^{(2)}(y+h)} - C_n e^{-i\gamma_n^{(2)}(y+h)} \right), \quad y < f(x).$$

12. Решите задачу о рассеянии волны TM поляризации на синусоидальной поверхности диэлектрической пробки в металлическом волноводе. Отличие от основной задачи в том, что дополнительное условие (вместо условия излучения) имеет вид $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{x,-h} = 0$, поэтому

$$u_2^{(N)} = \sum_{n=1}^N \cos \frac{\pi n x}{T} \cdot \left(C_n e^{i\gamma_n^{(2)}(y+h)} + C_n e^{-i\gamma_n^{(2)}(y+h)} \right), \quad y < f(x).$$

April 10, 2008