

1.1. Решение нелинейных уравнений

1.1.1. Метод деления пополам

1. Метод деления пополам.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: bisect.mcd, **see:** bisect.pdf,

Тема: Решение уравнения $x^2 - x - 6 = 0$ методом бисекции.

1.1.2. Метод простой итерации

Подробно метод рассмотрен в [12, разд. 1.5]. При определенных условиях решение уравнения

$$x = f(x) \tag{1}$$

можно вычислить как предел последовательности $x_{n+1} = f(x_n)$, правило останова итерационного процесса может предполагать выполнение любого из двух условий: $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ или $n > N$, где N – максимально допустимое число итераций.

Теорема 0.1. Если

$$\left| \frac{df}{dx} \right| \leq q < 1, \quad a < x < b,$$

$x_0 = f(x_0)$, $a < x_0 < b$, $a < x_1 < b$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 1$, то $a < x_n < b$ для всех номеров n , уравнение (1) имеет корень $x_0 \in (a, b)$, то этот корень единственный и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

Доказательство.
$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \\ x_0 = f(x_0), \end{cases} \quad x_{n+1} - x_0 = f(x_n) - f(x_0),$$

$x_{n+1} - x_0 = f'(\xi_n)(x_n - x_0)$, $|x_{n+1} - x_0| \leq q|x_n - x_0|$, $|x_{n+1} - x_0| \leq q^n|x_1 - x_0|$,

1. Метод простой итерации

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010a.mcd, **see:** fxroot2010a.pdf,

Тема: Решение уравнения $x = \lambda x(1 - x)$ методом простой итерации, рассмотрены случаи сходимости, критической сходимости, удвоения периода, динамического хаоса.

1.1.3. Метод Ньютона (или метод касательных) для уравнения

$$f(x) = 0 \quad (2)$$

состоит в построении последовательности x_n такой, что x_{n+1} — координата точки пересечения касательной к графику $f(x)$ в точке $(x_n, f(x_n))$ с горизонтальной осью координат.

Пусть $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и $x_0 \in (a, b)$.

Рассмотрим последовательность x_n , определяемую рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (3)$$

Пусть $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывные первую и вторую производные, которые сохраняют знак и не обращаются в ноль на $[a, b]$:

$$0 < m_1 \leq \left| \frac{df}{dx} \right| \leq M_1, \quad a \leq x \leq b \quad (4)$$

$$0 < m_2 \leq \left| \frac{df}{dx} \right| \leq M_2, \quad a \leq x \leq b. \quad (5)$$

Пусть на $[a, b]$ расположен корень уравнения (4) $x = \xi$ (из (4) вытекает, что этот корень единственный), $x_0 \in (a, b)$ выбрано так, что $f(x_0)f'(x_0) > 0$ и все последующие значения x_n определяются из (8).

Тогда все $x_n \in [a, b]$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, причем последовательность x_n монотонная.

Для погрешности на очередном шаге справедливы оценки

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad (6)$$

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2. \quad (7)$$

1. Метод Ньютона для уравнения без шума.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,
src: fxroot2010b-Newton-1.mcd, **see:** fxroot2010b-Newton-1.pdf,
Тема: Решение уравнения $x^2 - 0,2 = 0$ методом Ньютона.

2. Метод Ньютона в критическом случае.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,
src: fxroot2010b-Newton-3.mcd, **see:** fxroot2010b-Newton-3.pdf,
Тема: Решение уравнения $(x - 1)^2 = 0$ методом Ньютона.

3. Метод Ньютона в супер—критическом случае.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,
src: fxroot2010b-Newton-4.mcd, **see:** fxroot2010b-Newton-4.pdf,
Тема: Решение уравнения $(x - 1)^4 = 0$ методом Ньютона.

4. Метод Ньютона для уравнения с шумом.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,
src: fxroot2010b-Newton-2.mcd, **see:** fxroot2010b-Newton-2.pdf,
Тема: Решение уравнения $x^2 - 0,2 + \delta N(x) = 0$ методом Ньютона.

1.1.4. Метод хорд предполагает оценку $f'(x)$ по формуле конечных приращений:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

и построение итерационной последовательности

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}(x_n - x_0). \quad (8)$$

1. Метод хорд.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

1.1.5. Модифицированный метод Ньютона

использует конечно-разностную аппроксимацию первой производной по двум последним элементам итерационной последовательности, а не по первому и последнему, как метод хорд. Сформулировать общее правило вычисления очередного члена итерационной последовательности, обеспечивающее эффективный и универсальный метод, не очень просто. Для уравнения с одной скалярной неизвестной величиной x при выполнении (5) можно использовать вариант, в котором одновременно вычисляются две последовательности, которые приближают корень с недостатком и с избытком. Если для определенности $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$ на $[a, b]$, а начальное приближение выбрано так, что $f(x_0) > 0$ и $f(t_0) < 0$, то

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ t_{n+1} &= t_n - \frac{f(t_n)}{f(t_n) - f(x_n)}(t_n - x_n). \end{aligned} \quad (9)$$

В целом, методы, использующие первую производную или ее конечно-разностную аппроксимацию следует применять, если функция $f(x)$ имеет большую первую производную и не слишком большую вторую.

MathCad-программа для решения нелинейного уравнения $x = p \cos x$ итерационным методом Ньютона показана на рис.???.

1.1.6. Задания, решение нелинейных уравнений

Список заданий.

Задание I (очень простое): Решите заданное Вам уравнение с помощью встроенного метода выбранного Вами математического инструмента. Сделайте проверку точности, найдите невязку

– разность левой и правой частей заданного Вам уравнения.

Исследуйте решение при различных начальных данных.

Задание II (средней сложности): Решите заданное Вам уравнение методом деления отрезка пополам, методом хорд, методом простой итерации, методом Ньютона (по указанию преподавателя). Программы для каждого из методов напишите самостоятельно, используя в качестве образца демонстрационные документы.

Задание III (сложное): Проведите полное исследование уравнения с параметром вида $x = f(x, p)$. Постройте разложение решения уравнения с параметром в ряд по степеням параметра (в некоторых заданиях получится ряд по дробным степеням). Найдите в явной форме несколько первых коэффициентов и исследуйте точность.

Приведем примеры решения типичной задачи численным, символьным и аналитическим методами.

1.1.7. Решение уравнения встроенным численным методом

Вычислим первый положительный корень уравнения $x = \operatorname{ctg} x$. Используем встроенную функцию MathCad "root(...)", возвращающую корень уравнения $f(x) = 0$, для решения уравнения $\operatorname{ctg} x - x = 0$. Зададим начальное значение $x_0 = 1$. Результат: $x = 0.860333589 \dots$. Проверка показывает, что корень найден с точностью 10^{-15} .

1. Встроенный метод решения нелинейных уравнений.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010f-root-of.mcd, **see:** fxroot2010f-root-of.pdf,

Тема: Решение уравнения $x = \operatorname{ctg} x$.

1.1.8. Решение методом простой итерации

Итерационный процесс $x_0 = 1$; $x_{m+1} = \operatorname{ctg} x$ дает

$x = 1; 1,097; 0,511; 1,781; -0,213; -0,460; \dots$ и не сходится.

1. Метод простой итерации для решения нелинейных уравнений.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010g1-root-of.mcd, **see:** fxroot2010g1-root-of.pdf,

Тема: Решение уравнения $x = \operatorname{ctg} x$.

Для эквивалентного уравнения $x = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} \operatorname{ctg} x$ итерационный процесс сходится,

2. Метод простой итерации для решения нелинейных уравнений.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010g2-root-of.mcd, **see:** fxroot2010g2-root-of.pdf,

Тема: Решение модифицированного уравнения $x = \operatorname{ctg} x$, $x = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} \operatorname{ctg} x$.

3. Суперсходимость, метод простой итерации для решения нелинейных уравнений.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010g3-root-of.mcd, **see:** fxroot2010g3-root-of.pdf,

Тема: Решение модифицированного уравнения $x = \operatorname{ctg} x$, $x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{ctg} x$.

1.1.9. Применение асимптотических формул, 1

$x = \epsilon \operatorname{ctg} x$, $\epsilon > 0$, $\epsilon \rightarrow +0$,

$\operatorname{ctg} x = x^{-1} - \frac{x}{3} + o(x)$,

$x = \frac{\epsilon}{x} - \epsilon \frac{x}{3}$,

$3x^2 + \epsilon x^2 = 3\epsilon$, $x^2(3 + \epsilon) = 3\epsilon$,

$x = \sqrt{\frac{3\epsilon}{3 + \epsilon}}$,

$x = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{1 + \epsilon/3}}$,

$x = \sqrt{\epsilon} (1 + \epsilon/3)^{-1/2}$,

$$x = \sqrt{\varepsilon}(1 - \varepsilon/6 + o(\varepsilon)),$$

1.1.10. Применение асимптотических формул, 2

$$x = \epsilon \operatorname{ctg} x, \quad \epsilon > 0, \quad \epsilon \rightarrow +0,$$

$$\operatorname{ctg} x = x^{-1} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x),$$

$$x = \frac{\epsilon}{x} - \epsilon \frac{x}{3} - \epsilon \frac{x^3}{45},$$

$$45x^2 = 45\epsilon - 15\epsilon x^2 - \epsilon x^4,$$

$$\epsilon x^4 + (45 + 15\epsilon)x^2 - 45\epsilon = 0,$$

$$x^2 = \frac{-(45 + 15\epsilon) \pm \sqrt{(45 + 15\epsilon)^2 + 180\epsilon^2}}{2\epsilon},$$

$$x = \sqrt{\frac{-(45 + 15\epsilon) + \sqrt{(45 + 15\epsilon)^2 + 180\epsilon^2}}{2\epsilon}},$$

1.1.11. Решение уравнений методом разложения в ряд по степеням малого параметра

Аналитические преобразования в данном разделе целесообразно проводить с помощью математического инструмента. Рассмотрим уравнение, включающее малый параметр ϵ :

$$x = \epsilon \operatorname{ctg} x, \quad \epsilon > 0, \quad \epsilon \rightarrow +0. \quad (10)$$

1. Встроенный метод для решения нелинейных уравнений.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010h-sing1.mcd, **see:** fxroot2010h-sing1.pdf,

Тема: Решение уравнения $x = 10^{-1} \operatorname{ctg} x$.

2. Встроенный метод для решения нелинейных уравнений.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010h-sing7.mcd, **see:** fxroot2010h-sing7.pdf,

Тема: Решение уравнения $x = 10^{-7} \operatorname{ctg} x$.

Убедимся в том, что $x \rightarrow +0$ при $\epsilon \rightarrow +0$ и определим показатель степени главного члена асимптотического разложения функции

$x(\epsilon) = C\epsilon^\alpha + \dots$. Разлагая функцию $y = \text{ctg}(x)$ в степенной ряд методом разложения в ряд в символьной форме MathCad, указав 7 членов степенного ряда, получим такой результат:

$$\text{ctg } x = x^{-1} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 + O(x^7). \quad (11)$$

Пусть $x = \epsilon^\alpha + o(\epsilon^\alpha)$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Из (10) и (11) получим $\epsilon^\alpha = \epsilon^{1-\alpha}$, откуда $\alpha = \frac{1}{2}$. Обозначим $\epsilon = \mu^2$ и запишем (10) в виде

$$x = \mu^2 \text{ctg } x, \quad \mu > 0, \quad \mu \rightarrow +0. \quad (12)$$

Предположим, что

$$x = a\mu + b\mu^2 + c\mu^3 + d\mu^4 + \dots \quad (13)$$

Теперь в выражении $x^{-1} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5$ заменим переменную x на (13), используя метод замены в символьной форме MathCad. Результат подстановки умножим на μ^2 и используем метод разложения в ряд Тейлора MathCad в символьной форме, относительно переменной μ . Подставляя полученное выражение и (13) в (12), получим уравнение, обе части которого записаны в виде рядов по степеням μ :

$$a\mu + b\mu^2 + c\mu^3 + d\mu^4 + \dots = \frac{1}{a}\mu + \frac{-b}{a^2}\mu^2 + \left(\frac{-c}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{-a}{3} \right) \mu^3 + \dots \quad (14)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ , получим

$$x = \epsilon^{1/2} - \frac{1}{6}\epsilon^{3/2} + \dots \quad (15)$$

Для $\epsilon = 10^{-1}$ численное решение уравнения (10) дает $x = 0.311052\dots$, из (15) получим $x = 0.310957\dots$. Погрешность порядка 10^{-4} . Далее целесообразно построить таблицу значений

Решение нелинейных уравнений

первого корня для 7 значений ϵ , образующих геометрическую прогрессию с первым членом $\epsilon_0 = 1$ и знаменателем $q = 0.1$. Сравнить значения, полученные суммированием трех членов ряда Тейлора и вычисленные методом MathCad "root".

3. Решение нелинейных уравнений методом разложения в степенной ряд.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010p-sing1.mcd, **see:** fxroot2010p-sing1.pdf,

Тема: Решение уравнения $x = \epsilon \operatorname{ctg} x$ с точностью до $\epsilon^{3/2}$, всего три члена ряда, два ненулевых члена ряда.

4. Решение нелинейных уравнений методом разложения в степенной ряд.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010p-sing2.mcd, **see:** fxroot2010p-sing2.pdf,

Тема: Решение уравнения $x = \epsilon \operatorname{ctg} x$ с точностью до $\epsilon^{3/2}$, всего семь членов ряда, четыре ненулевых члена ряда.

1.1.12. Простые задачи

В задачах этого раздела один корень очевиден. Постройте графики левой и правой частей на одном чертеже, определите количество корней, найдите все корни.

$$1. \quad \ln x = \frac{1}{x} - 1. \quad 2. \quad x = (\ln x)^2 + 1. \quad 3. \quad \ln x = \sqrt{x} - 1.$$

$$4. \quad x = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x. \quad 5. \quad x = \frac{\pi}{4} (\operatorname{arctg} x)^{-1}. \quad 6. \quad x = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \sqrt{\operatorname{arctg} x}.$$

$$7. \quad x = \frac{2\pi}{3} \cos x. \quad 8. \quad \frac{\pi}{3} \cdot x = \arcsin x. \quad 9. \quad x = \frac{\pi}{2 \sin x}. \quad 10. \quad x = 1/x.$$

11. Найдите корни многочленов Чебышева. Явное выражение для многочленов Чебышева можно найти в справочнике по математике Корн и Корн. 12. Найдите корни многочленов Лежандра. Явное выражение для многочленов Лежандра можно найти в справочнике по математике Корн и Корн.

1.1.13. Сложные задачи

В задачах этого раздела один из корней соответствует касанию графиков левой и правой частей уравнения.

13. Доказать, что последовательность $y_0 = 1, y_1 = x, \dots, y_n = x^{y_{n-1}}$ сходится для $e^{-e} < x \leq e^{1/e}$. продемонстрировать график итерационного процесса для $x \in \{e^{-e} + 0.001, 0.99, 1, 1.01, e^{1/e} - 0.001\}$.

14. $x = \ln x + 1$. **15.** $x \ln x = x - 1$. **16.** $x^2 \ln x = x - 1$.

17. $x = e^x - 1$. **18.** $x^2 - 4x + 3 = x - 3.25$. **19.** $\sqrt{x} = \frac{x+1}{2}$.

20. $\sqrt[3]{x} = \frac{x+2}{3}$. **21.** $\sqrt[4]{x} = \frac{x+3}{4}$. **22.** $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}$.

23. $\tan x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

24. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$. Исследуйте начальное

значение $x_0 = 1$. **25.** $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$.

Исследуйте начальное значение $x_0 = 1$.

1.1.14. Вычисление корней трансцендентных уравнений

Каждая задача этого раздела включает два задания:

(а). Вычислить первый положительный корень нелинейного уравнения вида $x = f(x)$.

(б). Вычислить первые три ненулевых члена разложения решения уравнения $x = f(x, \epsilon)$ в ряд по степеням параметра ϵ при $\epsilon \rightarrow +0$.

26. (а). $x = 0.1 \operatorname{tg} x$. (б). $x = \epsilon \operatorname{tg} x$.

27. (а). $x = 0.99 \operatorname{tg} x$. (б). $x = (1 - \epsilon) \operatorname{tg} x$.

28. (а). $x = 1.01 \sin x$. (б). $x = (1 + \epsilon) \sin x$.

29. (а). $x = 100 \sin x$. (б). $x = \frac{1}{\epsilon} \sin x$.

30. (а). $x = 100(1 + \sin x)$. (б). $x = \frac{1}{\epsilon}(1 + \sin x)$.

Решение нелинейных уравнений

31. (а). $x = 0.5(1 + \sin x)$. (б). $x = \epsilon(1 + \sin x)$.
32. (а). $x = \operatorname{ctg} x$. (б). $x = \epsilon \operatorname{ctg} x$.
33. (а). $x = 100 \operatorname{ctg} x$. (б). $x = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{ctg} x$.
34. (а). $x = 0.99 \arcsin x$. (б). $x = (1 - \epsilon) \arcsin x$.
35. (а). $x = 0.99(\sin x + \arcsin x)$.
(б). $x = (1 - \epsilon)(\sin x + \arcsin x)$.
36. (а). $x = 0.646 \arcsin x$. (б). $x = (2/\pi + \epsilon) \arcsin x$.
37. (а). $x = 1.1 \arctg x$. (б). $x = (1 + \epsilon) \arctg x$.
38. (а). $x = 100 \arctg x$. (б). $x = \epsilon^{-1} \arctg x$.
39. (а). $x = 0.1 \cos x$. (б). $x = \epsilon \cos x$.
40. (а). $x = 10 \cos x$. (б). $x = \epsilon^{-1} \cos x$.
41. (а). $x = 10(1 + \cos x)$. (б). $x = \epsilon^{-1}(1 + \cos x)$.
42. (а). $x = 1.1 \ln(1 + x)$. (б). $x = (1 + \epsilon) \ln(1 + x)$.
43. (а). $x = -0.9 \ln(1 - x)$. (б). $x = -(1 - \epsilon) \ln(1 - x)$.
44. (а). $x = 0.9(e^x - 1)$. (б). $x = (1 - \epsilon)(e^x - 1)$.
45. (а). $x = 1.1(1 - e^{-x})$. (б). $x = (1 + \epsilon)(1 - e^{-x})$.
46. (а). $x = 100 \operatorname{arctg}(x^2)$. (б). $x = \epsilon^{-1} \operatorname{arctg}(x^2)$.
47. (а). $x = \operatorname{arctg}(100x^2)$. (б). $x = \operatorname{arctg}(\epsilon^{-1}x^2)$.

1.1.15. Решение систем нелинейных уравнений

Решение нелинейной системы вида

$$F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad m = 1, \dots, n, \quad (16)$$

— одна из основных задач вычислительной математики, наряду с поиском экстремума функции нескольких переменных, решением дифференциальных и интегральных уравнений и т.д. Следует заметить, что задача (16) очевидным образом приводится к задаче поиска минимума функции нескольких переменных.

В этом разделе мы предлагаем использовать для решения системы нелинейных уравнений один из следующих методов:

1. Метод простой итерации. Для системы вида

$$x_m = G_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad m = 1, \dots, n, \quad (17)$$

итерационная последовательность имеет вид

$$x_m^{(k+1)} = G_m(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}).$$

2. Метод Ньютона. Для системы (16) итерационная последовательность использует матрицу первых производных:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ \dots \\ -f_n \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$\Delta x_m = x_m^{(k+1)} - x_m^{(k)}$, в правой части значения функций вычисляются для $x_m = x_m^{(k)}$.

3. Все специализированные математические пакеты включают набор функций для численного решения нелинейных систем.

В пакете MathCad имеются функции "Find()" и "Minerr", использующие в зависимости от особенностей заданной системы метод простой итерации или метод Ньютона. Все упомянутые методы требуют задания стартовой точки итерационной последовательности.

Приведем небольшой список задач, предназначенных для выполнения исследования сходимости различных итерационных методов.

Задание для компьютерного моделирования: Решить систему, используя один из численных методов по указанию преподавателя:

48.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\x_1^2 + x_2 + x_3^2 + x_4 &= 12, \\x_1x_2 + x_2x_3 + x_4 &= 5, \\x_1x_3 + x_2x_4 + x_4^2 &= 9\end{aligned}\tag{19}$$

49.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 20.07, \\x_1^2 + 2x_1x_2 + x_4^3 &= 15.88, \\x_1^3 + x_3^3 + x_4 &= 21.218, \\2x_2 + x_3x_4 &= 7.9.\end{aligned}\tag{20}$$

50.

$$\begin{aligned}5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 16, \\x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 &= 17, \\x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 &= 9, \\x_1x_3 + x_2x_4 + x_1^3 &= 8.\end{aligned}\tag{21}$$

51.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 31, \\x_1x_2 + x_2x_3 + x_4x_5 &= 58, \\x_1^2 + x_3x_4 - x_2^2 + x_1x_5 &= 79, \\x_1 - x_2x_4 + x_3^2 + x_5^3 &= 17, \\x_1x_3 - x_2^3x_5 - x_5x_2 + x_3^2x_4 &= 234.\end{aligned}\tag{22}$$

В качестве примера рекомендуем рассмотреть задачу определения положения касательной к заданной кривой на плоскости.

Образец отчета.

Тема: Вычисление координат точек касания прямой, проходящей через заданную точку, и заданной кривой.

Задание: Вычислить координаты всех точек касания кривой $y - x^3 = 0$ и прямой, проходящей через точку $x = a$, $y = b$. Решить в общем виде и для $a = b = 2$.

Решение. Так как кривая L задана в декартовых координатах в неявном виде, $F(x, y) = 0$, то для определения положения точек касания кривой L и прямой, проходящей через заданную точку $x = a$, $y = b$, следует решить систему уравнений

$$F(x, y) = 0, \quad (a - x)\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + (b - y)\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0,$$

второе уравнение эквивалентно ортогональности касательной и нормали к кривой. Полное описание метода решения и результатов представлены в виде MathCad документа "tangent.mcd" (распечатка прилагается). При указанных значениях a и b имеется три возможных положения касательной, координаты точек касания

x	2.879	-0.532	0.652
y	23.872	-0.150	0.278

Заметим, что система уравнений

$$y - x^3 = 0, \quad (a - x) \times (-3x^2) + (b - y) \times 1 = 0 \quad (23)$$

эквивалентна кубическому уравнению

$$2x^3 - 3ax + b = 0. \quad (24)$$

В соответствии с этим, метод "Find()" в символьной форме дает в применении к системе (23) три решения. Несмотря на кажущуюся громоздкость полученных формул, они дают точное решение при любых соотношениях a и b , причем число вещественных решений может быть 1, 2 (одно кратности 2) или 3. При $a = b = 2$ имеется три различных вещественных решения. Естественно попытаться получить приближенные асимптотические формулы в различных предельных случаях. Если $a \rightarrow \infty$, то приближенные решения (24) можно получить из уравнения $2x^3 - 3ax^2 = 0$, $x_1 \approx 3a/2$, $x_{2,3} \approx 0$. Более точную оценку $x_{2,3}$ можно затем получить из уравнения $-3ax^2 + b = 0$, это дает $x_{2,3} \approx \pm \sqrt{b/3a}$. Если необходимо получить более точную оценку x_1 при $a \rightarrow \infty$, то можно использовать разложение в ряд по обратным степеням a : подставляя $x = 3a/2 + \epsilon$ в (24), получим $\epsilon = -2b/9a^2$, т.е. $x_1 \approx 3a/2 - 2b/9a^2$. Для указанных значений $a = b = 2$ получим $x_1 \approx 2.888$, что отличается от точного значения $x = 2.879$ менее чем на 0.01. ♣

Самостоятельно получите более точные асимптотические формулы для x при $a \rightarrow \infty$. Исследуйте случай $a = \text{const}$, $b \rightarrow \infty$. Исследуйте асимптотику при малых значениях параметров. Сравнивайте полученные асимптотические выражения с точным аналитическим решением.

Варианты постановки задачи.

Задание для компьютерного моделирования: Определить положения точек касания прямой, параллельной заданному

вектору на плоскости, и кривой L , заданной в неявной форме. Для выполнения этого задания следует использовать список задач по теме "Неявные функции".

Задание для компьютерного моделирования: На плоскости уравнениями $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ (т.е. в неявной форме) заданы две кривые L_1 и L_2 . Определить все возможные положения прямой L_0 , касающейся одновременно L_1 и L_2 . Использовать список задач по теме "Неявные функции".

Задание для компьютерного моделирования: Решить предыдущие задачи для кривых, заданных в параметрической форме. Использовать список задач по теме "Параметрические функции".

Приведем несколько формулировок более сложных задач, которые можно рекомендовать для сильных студентов:

Задание для компьютерного моделирования: В трехмерном пространстве задана кривая L и поверхность S . Определить все возможные положения прямой L_0 , касающейся одновременно L и S . Использовать список задач по теме "Поверхности, заданные в неявной форме".

Задание для компьютерного моделирования: В трехмерном пространстве заданы две поверхности S_1 и S_2 и точка M . Определить все возможные положения прямой L , касающейся одновременно S_1 и S_2 и проходящей через точку M . Использовать список задач по теме "Поверхности, заданные в неявной форме".

Задание для компьютерного моделирования: В трехмерном пространстве заданы две поверхности S_1 и S_2 и вектор $\vec{A}$. Определить все возможные положения прямой L , касающейся одновременно S_1 и S_2 и параллельной $\vec{A}$. Использовать список задач по теме "Поверхности, заданные в неявной форме".

0.0.1 Методы погружения для нелинейных задач

[?] Метод погружения для задачи (16) предполагает введение в систему параметра t :

$$\tilde{F}_k(t, x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (25)$$

такого, что при $t = 0$ система (25) имеет известное решение, а при $t = 1$ совпадает с (16):

$\tilde{F}_k(1, x_1, x_2, \dots, x_m) = F_k(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $k = 1, \dots, n$. Далее задача (25) решается для значений $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = 1$, причем решение предыдущего шага используется в качестве начального приближения следующего шага.

1.1.16. Многослойный планарный волновод

$$v'' + k_0^2 \varepsilon(x) v - \gamma^2 v = 0,$$

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_3, & 0 \leq x < b_1, \\ \varepsilon_2, & b_1 \leq x < b_2, \\ \varepsilon_1, & b_2 \leq x < +\infty, \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} C_1 \cos(\sqrt{k_0^2 \varepsilon_3 - \gamma^2} x), & 0 \leq x < b_1, \\ C_2 \sinh(\sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} (x - b_1)) + C_3 \cosh(\sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} (x - b_1)), & b_1 \leq x < b_2, \\ C_4 e^{-\sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_1} (x - b_2)}, & b_2 \leq x < +\infty, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \cos(\sqrt{k_0^2 \varepsilon_3 - \gamma^2} b_1) = C_3, \\ -C_1 \sqrt{k_0^2 \varepsilon_3 - \gamma^2} \sin(\sqrt{k_0^2 \varepsilon_3 - \gamma^2} b_1) = C_2 \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2}, \\ C_2 \sinh(\sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} (b_2 - b_1)) + C_3 \cosh(\sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} (b_2 - b_1)) = C_4, \\ C_2 \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} \cosh(\sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} (b_2 - b_1)) + C_3 \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} \sinh(\sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} (b_2 - b_1)) = 0, \\ \left| \begin{array}{cc} \cos(\sqrt{k_0^2 \varepsilon_3 - \gamma^2} b_1) & 0 \\ -\sqrt{k_0^2 \varepsilon_3 - \gamma^2} \sin(\sqrt{k_0^2 \varepsilon_3 - \gamma^2} b_1) & -\sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} \\ 0 & \sinh(\sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} (b_2 - b_1)) \\ 0 & \cosh(\sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} (b_2 - b_1)) \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} \sinh(\sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} (b_2 - b_1)) \\ \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} \cosh(\sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} (b_2 - b_1)) \\ \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} \sinh(\sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} (b_2 - b_1)) \end{array} \end{cases}$$

References

- [1] Бахвалов Н.С. Численные методы
- [2] Корн Т., Корн С. Справочник по математике
- [Ref Lab] Auth Tit, M.: Мир, 1999.
- [3] Auth Tit, 1974. J., Vol.Vol, NN, PP.PP.
- [Unknown Book] Unknown Title, M.: Мир, 1999.
- [Ахромеева, Курдюмов, Малинецкий] Ахромеева Т.С.,
Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Парадоксы мира
нестационарных структур, В кн. Компьютеры и
нелинейные явления. М.: Наука, 1988, с.44-122.
- [Бахвалов] Бахвалов Н.С. Численные методы, М.: Наука, 1973.
- [Беллман, Энджел | Беллман Р., Энджел Э. Динамическое
программирование и уравнения в частных производных,
М.: Мир, 1974.
- [4] Берке Н. Пространство-время, геометрия, космология, М.:
Мир, 1985.
- [5] Боголюбов А.Н., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Лекции по
математической физики, М.: Изд-во МГУ, 1993.
- [6] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по высшей
математике, М.: Физматгиз, 1959.
- [7] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в
теории сингулярных возмущений, М.:Высшая школа, 1990.

- [8] Васильева А.Б. Об устойчивости контрастных структур, 1991. Матем. моделирование, Vol.3, N4, PP.114-123.
- [9] Гавурин М.К. Численные методы, М.:Наука, 1971.
- [10] Демирчан К.С., Чечурин В.Л. Машинные расчеты электромагнитных полей, М.: Высшая школа, 1986.
- [Дюлак] Дюлак Г. О предельных циклах, М.: Наука, 1981.
- [11] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику, М.: Наука, 1988.
- [Икрамов-1984] Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений, М.: Наука, 1984.
- [12] Калиткин Н.Н. Численные методы, М.: Наука, 1978.
- [13] Кампе де Ферье Ж., Кемпбел Р., Петьо Г., Фогель Г. Функции математической физики, М.: Наука, 1963.
- [Коллатц, Альбрехт] Коллатц Л., Альбрехт Ю. Задачи по прикладной математике, М.: Мир, 1978.
- [Кунин] Кунин С. Вычислительная физика, М.: Мир, 1992.
- [Коул] Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике, М.: Мир, 1972.
- [Ландау, Лифшиц, Механика] Ландау Л.Д., Лифшиц И.М. Механика, М.: Наука, 1977.
- [Лейзер] Лейзер Д. Создавая картину вселенной, М.: Мир, 1988.
- [14] Николис Дж. Динамика иерархических систем, М.: Мир, 1989.

Московский Государственный университет Физический факультет
Быков А.А. Методы компьютерной математики
Решение нелинейных уравнений

- [Николис, Пригожин] Николис Дж., Пригожин И.
Самоорганизация в неравновесных системах, М.: Мир,
1979.
- [Никольский] Никольский В.В. Электродинамика и
распространение радиоволн, М.:Наука, 1978.
- [Рихтмайер, Мортон] Рихтмайер Р., Мортон Л. Разностные
методы решения краевых задач, М.: Мир, 1972.
- [Самарский] Самарский А.А. Введение в численные методы, М.:
Наука, 1982.
- [Самарский] Самарский А.А. Теория разностных схем, М.:
Наука, 1977.
- [Самарский, Лазаров, Макаров] Самарский А.А., Лазаров Р.Д.,
Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных
уравнений с обобщенными решениями, М.: Высшая
Школа, 1987.
- [Самарский, Николаев] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы
решения сеточных уравнений, М.: Наука, 1978.
- [15] Свешников А.Г. К обоснованию метода расчета
нерегулярных волноводов, 1963. ЖВМ, Vol.3, N1, PP.170-
179.
- [Тихонов, Самарский] Тихонов А.Н., Самарский А.А.
Уравнения математической физики, М.:Наука, 1976.
- [Тихонов, Васильева, Свешников] Тихонов А.Н., Васильева
А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения,
М.:Наука, 1980.

[Толстов] Толстов Г.П. Ряды Фурье, М.: Наука, 1980.

[Тода] Тода М. Теория нелинейных решеток, М.: Мир, 1984.

[Флетчер] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина, М.:Мир, 1988.

[Хемминг] Хемминг Р.В. Численные методы, М.: Наука, 1968.

[16] Хакен Г. Синергетика, М.: Мир, 1980.

[17] Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах, М.: Мир, 1979.

[Эльсгольц] Эльсгольц Э.Г. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, М.: Наука, 2002.

[Ферми, Паста, Улам 1955] Ферми Э., Паста Дж., Улам С. Исследование нелинейных задач, В кн. Ферми Э. Научные труды. В 2-х томах. Т.2, с.645–656. – М.: Наука, 1972.

[18] Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах, М.:Мир, 1987.

[19] Allen R.C., Wing G.M. An invariant embedding algorithm for the solution of inhomogeneous two-point boundary-value problems, 1974. J. Computational Phys., Vol.14, N1, PP.40-58.

[20] Круглински Д.Дж. Основы Visual C++, 650с., Microsoft Press, 1997.

[21] Мюррей Н., Паррас К. Visual C++, Мастер, 1997.

[22] Шилд Л. Теория и практика C++, Мастер, 1997.

[23] Шилд Л. MFC, Киев, bhv, 1997.

- [24] Янг М.Дж. Visual C++ для профессионалов, 700с., Энтроп, 1997.
- [25] Фирменное руководство Ресурсы Windows NT, Microsoft Press, 1996.
- [26] Фирменное руководство Ресурсы Windows 95, Microsoft Press, 1996.
- [27] Йорт Шид Windows NT 4.0 Workstation, 780с., bhv, 1997.
- [28] Петцольд Ч. Программирование для Windows 95, Т. 1 и 2, Киев, bhv, 1997.
- [29] Шаммас Н. Основы C++ и объектно-ориентированного программирования, Киев, Диалектика, 1996.
- [30] Мешков А., Тихомиров Ю. Visual C++ и MFC, Т. 1 и 2, Мастер, 1997.
- [31] Мюррей Н., Паррас К. Создание переносимых переложений для Windows, 800с., Мастер, 1997.
- [32] Калверт Чарльз Освой самостоятельно программирование для Windows 95, М., Бином, 1997.

February 24, 2010