

1.1. Решение нелинейных уравнений

1.1.1. Метод деления пополам

1. Метод деления пополам.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: bisect.mcd, **see:** bisect.pdf,

Тема: Решение уравнения $x^2 - x - 6 = 0$ методом бисекции.

1.1.2. Метод простой итерации

Подробно метод рассмотрен в [?, разд. 1.5]. При определенных условиях решение уравнения

$$x = f(x) \tag{1}$$

можно вычислить как предел последовательности $x_{n+1} = f(x_n)$, правило останова итерационного процесса может предполагать выполнение любого из двух условий: $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ или $n > N$, где N – максимально допустимое число итераций.

Теорема 0.1. Если

$$\left| \frac{df}{dx} \right| \leq q < 1, \quad a < x < b,$$

$x_0 = f(x_0)$, $a < x_0 < b$, $a < x_1 < b$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 1$, то $a < x_n < b$ для всех номеров n , уравнение (1) имеет корень $x_0 \in (a, b)$, то этот корень единственный и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

Доказательство.
$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \\ x_0 = f(x_0), \end{cases} \quad x_{n+1} - x_0 = f(x_n) - f(x_0),$$

$x_{n+1} - x_0 = f'(\xi_n)(x_n - x_0)$, $|x_{n+1} - x_0| \leq q|x_n - x_0|$, $|x_{n+1} - x_0| \leq q^n|x_1 - x_0|$,

1. Метод простой итерации

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010a.mcd, **see:** fxroot2010a.pdf,

Тема: Решение уравнения $x = \lambda x(1 - x)$ методом простой итерации, рассмотрены случаи сходимости, критической сходимости, удвоения периода, динамического хаоса.

1.1.3. Метод Ньютона (или метод касательных) для уравнения

$$f(x) = 0 \quad (2)$$

состоит в построении последовательности x_n такой, что x_{n+1} — координата точки пересечения касательной к графику $f(x)$ в точке $(x_n, f(x_n))$ с горизонтальной осью координат.

Пусть $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и $x_0 \in (a, b)$.

Рассмотрим последовательность x_n , определяемую рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (3)$$

Пусть $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывные первую и вторую производные, которые сохраняют знак и не обращаются в ноль на $[a, b]$:

$$0 < m_1 \leq \left| \frac{df}{dx} \right| \leq M_1, \quad a \leq x \leq b \quad (4)$$

$$0 < m_2 \leq \left| \frac{df}{dx} \right| \leq M_2, \quad a \leq x \leq b. \quad (5)$$

Пусть на $[a, b]$ расположен корень уравнения (4) $x = \xi$ (из (4) вытекает, что этот корень единственный), $x_0 \in (a, b)$ выбрано так, что $f(x_0)f'(x_0) > 0$ и все последующие значения x_n определяются из (8).

Тогда все $x_n \in [a, b]$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, причем последовательность x_n монотонная.

Для погрешности на очередном шаге справедливы оценки

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad (6)$$

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2. \quad (7)$$

1. Метод Ньютона для уравнения без шума.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,
src: fxroot2010b-Newton-1.mcd, **see:** fxroot2010b-Newton-1.pdf,
Тема: Решение уравнения $x^2 - 0,2 = 0$ методом Ньютона.

2. Метод Ньютона в критическом случае.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,
src: fxroot2010b-Newton-3.mcd, **see:** fxroot2010b-Newton-3.pdf,
Тема: Решение уравнения $(x - 1)^2 = 0$ методом Ньютона.

3. Метод Ньютона в супер—критическом случае.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,
src: fxroot2010b-Newton-4.mcd, **see:** fxroot2010b-Newton-4.pdf,
Тема: Решение уравнения $(x - 1)^4 = 0$ методом Ньютона.

4. Метод Ньютона для уравнения с шумом.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,
src: fxroot2010b-Newton-2.mcd, **see:** fxroot2010b-Newton-2.pdf,
Тема: Решение уравнения $x^2 - 0,2 + \delta N(x) = 0$ методом Ньютона.

1.1.4. Метод хорд предполагает оценку $f'(x)$ по формуле конечных приращений:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

и построение итерационной последовательности

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}(x_n - x_0). \quad (8)$$

1. Метод хорд.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

1.1.5. Модифицированный метод Ньютона

использует конечно-разностную аппроксимацию первой производной по двум последним элементам итерационной последовательности, а не по первому и последнему, как метод хорд. Сформулировать общее правило вычисления очередного члена итерационной последовательности, обеспечивающее эффективный и универсальный метод, не очень просто. Для уравнения с одной скалярной неизвестной величиной x при выполнении (5) можно использовать вариант, в котором одновременно вычисляются две последовательности, которые приближают корень с недостатком и с избытком. Если для определенности $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$ на $[a, b]$, а начальное приближение выбрано так, что $f(x_0) > 0$ и $f(t_0) < 0$, то

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ t_{n+1} &= t_n - \frac{f(t_n)}{f(t_n) - f(x_n)}(t_n - x_n). \end{aligned} \quad (9)$$

В целом, методы, использующие первую производную или ее конечно-разностную аппроксимацию следует применять, если функция $f(x)$ имеет большую первую производную и не слишком большую вторую.

MathCad-программа для решения нелинейного уравнения $x = p \cos x$ итерационным методом Ньютона показана на рис.???.

1.1.6. Задания, решение нелинейных уравнений

Список заданий.

Задание I (очень простое): Решите заданное Вам уравнение с помощью встроенного метода выбранного Вами математического инструмента. Сделайте проверку точности, найдите невязку

– разность левой и правой частей заданного Вам уравнения.

Исследуйте решение при различных начальных данных.

Задание II (средней сложности): Решите заданное Вам уравнение методом деления отрезка пополам, методом хорд, методом простой итерации, методом Ньютона (по указанию преподавателя). Программы для каждого из методов напишите самостоятельно, используя в качестве образца демонстрационные документы.

Задание III (сложное): Проведите полное исследование уравнения с параметром вида $x = f(x, p)$. Постройте разложение решения уравнения с параметром в ряд по степеням параметра (в некоторых заданиях получится ряд по дробным степеням). Найдите в явной форме несколько первых коэффициентов и исследуйте точность.

Приведем примеры решения типичной задачи численным, символьным и аналитическим методами.

1.1.7. Решение уравнения встроенным численным методом

Вычислим первый положительный корень уравнения $x = \operatorname{ctg} x$. Используем встроенную функцию MathCad "root(...)", возвращающую корень уравнения $f(x) = 0$, для решения уравнения $\operatorname{ctg} x - x = 0$. Зададим начальное значение $x_0 = 1$. Результат: $x = 0.860333589 \dots$. Проверка показывает, что корень найден с точностью 10^{-15} .

1. Встроенный метод решения нелинейных уравнений.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010f-root-of.mcd, **see:** fxroot2010f-root-of.pdf,

Тема: Решение уравнения $x = \operatorname{ctg} x$.

1.1.8. Решение методом простой итерации

Итерационный процесс $x_0 = 1$; $x_{m+1} = \operatorname{ctg} x$ дает

$x = 1; 1,097; 0,511; 1,781; -0,213; -0,460; \dots$ и не сходится.

1. Метод простой итерации для решения нелинейных уравнений.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010g1-root-of.mcd, **see:** fxroot2010g1-root-of.pdf,

Тема: Решение уравнения $x = \operatorname{ctg} x$.

Для эквивалентного уравнения $x = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} \operatorname{ctg} x$ итерационный процесс сходится,

2. Метод простой итерации для решения нелинейных уравнений.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010g2-root-of.mcd, **see:** fxroot2010g2-root-of.pdf,

Тема: Решение модифицированного уравнения $x = \operatorname{ctg} x$, $x = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} \operatorname{ctg} x$.

3. Суперсходимость, метод простой итерации для решения нелинейных уравнений.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010g3-root-of.mcd, **see:** fxroot2010g3-root-of.pdf,

Тема: Решение модифицированного уравнения $x = \operatorname{ctg} x$, $x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{ctg} x$.

1.1.9. Применение асимптотических формул, 1

$x = \epsilon \operatorname{ctg} x$, $\epsilon > 0$, $\epsilon \rightarrow +0$,

$\operatorname{ctg} x = x^{-1} - \frac{x}{3} + o(x)$,

$x = \frac{\epsilon}{x} - \epsilon \frac{x}{3}$,

$3x^2 + \epsilon x^2 = 3\epsilon$, $x^2(3 + \epsilon) = 3\epsilon$,

$x = \sqrt{\frac{3\epsilon}{3 + \epsilon}}$,

$x = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{1 + \epsilon/3}}$,

$x = \sqrt{\epsilon} (1 + \epsilon/3)^{-1/2}$,

$$x = \sqrt{\varepsilon}(1 - \varepsilon/6 + o(\varepsilon)),$$

1.1.10. Применение асимптотических формул, 2

$$x = \epsilon \operatorname{ctg} x, \quad \epsilon > 0, \quad \epsilon \rightarrow +0,$$

$$\operatorname{ctg} x = x^{-1} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x),$$

$$x = \frac{\epsilon}{x} - \epsilon \frac{x}{3} - \epsilon \frac{x^3}{45},$$

$$45x^2 = 45\epsilon - 15\epsilon x^2 - \epsilon x^4,$$

$$\epsilon x^4 + (45 + 15\epsilon)x^2 - 45\epsilon = 0,$$

$$x^2 = \frac{-(45 + 15\epsilon) \pm \sqrt{(45 + 15\epsilon)^2 + 180\epsilon^2}}{2\epsilon},$$

$$x = \sqrt{\frac{-(45 + 15\epsilon) + \sqrt{(45 + 15\epsilon)^2 + 180\epsilon^2}}{2\epsilon}},$$

1.1.11. Решение уравнений методом разложения в ряд по степеням малого параметра

Аналитические преобразования в данном разделе целесообразно проводить с помощью математического инструмента. Рассмотрим уравнение, включающее малый параметр ϵ :

$$x = \epsilon \operatorname{ctg} x, \quad \epsilon > 0, \quad \epsilon \rightarrow +0. \quad (10)$$

1. Встроенный метод для решения нелинейных уравнений.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010h-sing1.mcd, **see:** fxroot2010h-sing1.pdf,

Тема: Решение уравнения $x = 10^{-1} \operatorname{ctg} x$.

2. Встроенный метод для решения нелинейных уравнений.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010h-sing7.mcd, **see:** fxroot2010h-sing7.pdf,

Тема: Решение уравнения $x = 10^{-7} \operatorname{ctg} x$.

Убедимся в том, что $x \rightarrow +0$ при $\epsilon \rightarrow +0$ и определим показатель степени главного члена асимптотического разложения функции

$x(\epsilon) = C\epsilon^\alpha + \dots$. Разлагая функцию $y = \text{ctg}(x)$ в степенной ряд методом разложения в ряд в символьной форме MathCad, указав 7 членов степенного ряда, получим такой результат:

$$\text{ctg } x = x^{-1} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 + O(x^7). \quad (11)$$

Пусть $x = \epsilon^\alpha + o(\epsilon^\alpha)$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Из (10) и (11) получим $\epsilon^\alpha = \epsilon^{1-\alpha}$, откуда $\alpha = \frac{1}{2}$. Обозначим $\epsilon = \mu^2$ и запишем (10) в виде

$$x = \mu^2 \text{ctg } x, \quad \mu > 0, \quad \mu \rightarrow +0. \quad (12)$$

Предположим, что

$$x = a\mu + b\mu^2 + c\mu^3 + d\mu^4 + \dots \quad (13)$$

Теперь в выражении $x^{-1} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5$ заменим переменную x на (13), используя метод замены в символьной форме MathCad. Результат подстановки умножим на μ^2 и используем метод разложения в ряд Тейлора MathCad в символьной форме, относительно переменной μ . Подставляя полученное выражение и (13) в (12), получим уравнение, обе части которого записаны в виде рядов по степеням μ :

$$a\mu + b\mu^2 + c\mu^3 + d\mu^4 + \dots = \frac{1}{a}\mu + \frac{-b}{a^2}\mu^2 + \left(\frac{-c}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{-a}{3} \right) \mu^3 + \dots \quad (14)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ , получим

$$x = \epsilon^{1/2} - \frac{1}{6}\epsilon^{3/2} + \dots \quad (15)$$

Для $\epsilon = 10^{-1}$ численное решение уравнения (10) дает $x = 0.311052\dots$, из (15) получим $x = 0.310957\dots$. Погрешность порядка 10^{-4} . Далее целесообразно построить таблицу значений

Решение нелинейных уравнений

первого корня для 7 значений ϵ , образующих геометрическую прогрессию с первым членом $\epsilon_0 = 1$ и знаменателем $q = 0.1$. Сравнить значения, полученные суммированием трех членов ряда Тейлора и вычисленные методом MathCad "root".

3. Решение нелинейных уравнений методом разложения в степенной ряд.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010p-sing1.mcd, **see:** fxroot2010p-sing1.pdf,

Тема: Решение уравнения $x = \epsilon \operatorname{ctg} x$ с точностью до $\epsilon^{3/2}$, всего три члена ряда, два ненулевых члена ряда.

4. Решение нелинейных уравнений методом разложения в степенной ряд.

Дата: 2010-02-24, **dir:** cm-site-src/mcd/slv-fx,

src: fxroot2010p-sing2.mcd, **see:** fxroot2010p-sing2.pdf,

Тема: Решение уравнения $x = \epsilon \operatorname{ctg} x$ с точностью до $\epsilon^{3/2}$, всего семь членов ряда, четыре ненулевых члена ряда.

1.1.12. Простые задачи

В задачах этого раздела один корень очевиден. Постройте графики левой и правой частей на одном чертеже, определите количество корней, найдите все корни.

$$1. \quad \ln x = \frac{1}{x} - 1. \quad 2. \quad x = (\ln x)^2 + 1. \quad 3. \quad \ln x = \sqrt{x} - 1.$$

$$4. \quad x = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x. \quad 5. \quad x = \frac{\pi}{4} (\operatorname{arctg} x)^{-1}. \quad 6. \quad x = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \sqrt{\operatorname{arctg} x}.$$

$$7. \quad x = \frac{2\pi}{3} \cos x. \quad 8. \quad \frac{\pi}{3} \cdot x = \arcsin x. \quad 9. \quad x = \frac{\pi}{2 \sin x}. \quad 10. \quad x = 1/x.$$

11. Найдите корни многочленов Чебышева. Явное выражение для многочленов Чебышева можно найти в справочнике по математике Корн и Корн. 12. Найдите корни многочленов Лежандра. Явное выражение для многочленов Лежандра можно найти в справочнике по математике Корн и Корн.

1.1.13. Сложные задачи

В задачах этого раздела один из корней соответствует касанию графиков левой и правой частей уравнения.

13. Доказать, что последовательность $y_0 = 1, y_1 = x, \dots, y_n = x^{y_{n-1}}$ сходится для $e^{-e} < x \leq e^{1/e}$. продемонстрировать график итерационного процесса для $x \in \{e^{-e} + 0.001, 0.99, 1, 1.01, e^{1/e} - 0.001\}$.

14. $x = \ln x + 1$. **15.** $x \ln x = x - 1$. **16.** $x^2 \ln x = x - 1$.

17. $x = e^x - 1$. **18.** $x^2 - 4x + 3 = x - 3.25$. **19.** $\sqrt{x} = \frac{x+1}{2}$.

20. $\sqrt[3]{x} = \frac{x+2}{3}$. **21.** $\sqrt[4]{x} = \frac{x+3}{4}$. **22.** $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}$.

23. $\tan x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

24. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$. Исследуйте начальное

значение $x_0 = 1$. **25.** $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$.

Исследуйте начальное значение $x_0 = 1$.

1.1.14. Вычисление корней трансцендентных уравнений

Каждая задача этого раздела включает два задания:

(а). Вычислить первый положительный корень нелинейного уравнения вида $x = f(x)$.

(б). Вычислить первые три ненулевых члена разложения решения уравнения $x = f(x, \epsilon)$ в ряд по степеням параметра ϵ при $\epsilon \rightarrow +0$.

26. (а). $x = 0.1 \operatorname{tg} x$. (б). $x = \epsilon \operatorname{tg} x$.

27. (а). $x = 0.99 \operatorname{tg} x$. (б). $x = (1 - \epsilon) \operatorname{tg} x$.

28. (а). $x = 1.01 \sin x$. (б). $x = (1 + \epsilon) \sin x$.

29. (а). $x = 100 \sin x$. (б). $x = \frac{1}{\epsilon} \sin x$.

30. (а). $x = 100(1 + \sin x)$. (б). $x = \frac{1}{\epsilon}(1 + \sin x)$.

Решение нелинейных уравнений

31. (а). $x = 0.5(1 + \sin x)$. (б). $x = \epsilon(1 + \sin x)$.
32. (а). $x = \operatorname{ctg} x$. (б). $x = \epsilon \operatorname{ctg} x$.
33. (а). $x = 100 \operatorname{ctg} x$. (б). $x = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{ctg} x$.
34. (а). $x = 0.99 \arcsin x$. (б). $x = (1 - \epsilon) \arcsin x$.
35. (а). $x = 0.99(\sin x + \arcsin x)$.
(б). $x = (1 - \epsilon)(\sin x + \arcsin x)$.
36. (а). $x = 0.646 \arcsin x$. (б). $x = (2/\pi + \epsilon) \arcsin x$.
37. (а). $x = 1.1 \arctg x$. (б). $x = (1 + \epsilon) \arctg x$.
38. (а). $x = 100 \arctg x$. (б). $x = \epsilon^{-1} \arctg x$.
39. (а). $x = 0.1 \cos x$. (б). $x = \epsilon \cos x$.
40. (а). $x = 10 \cos x$. (б). $x = \epsilon^{-1} \cos x$.
41. (а). $x = 10(1 + \cos x)$. (б). $x = \epsilon^{-1}(1 + \cos x)$.
42. (а). $x = 1.1 \ln(1 + x)$. (б). $x = (1 + \epsilon) \ln(1 + x)$.
43. (а). $x = -0.9 \ln(1 - x)$. (б). $x = -(1 - \epsilon) \ln(1 - x)$.
44. (а). $x = 0.9(e^x - 1)$. (б). $x = (1 - \epsilon)(e^x - 1)$.
45. (а). $x = 1.1(1 - e^{-x})$. (б). $x = (1 + \epsilon)(1 - e^{-x})$.
46. (а). $x = 100 \operatorname{arctg}(x^2)$. (б). $x = \epsilon^{-1} \operatorname{arctg}(x^2)$.
47. (а). $x = \operatorname{arctg}(100x^2)$. (б). $x = \operatorname{arctg}(\epsilon^{-1}x^2)$.